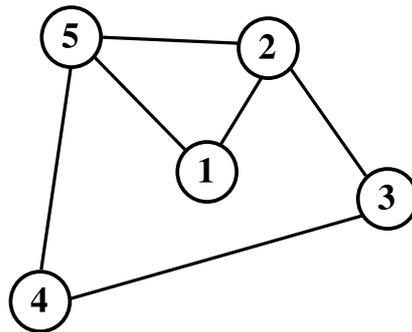
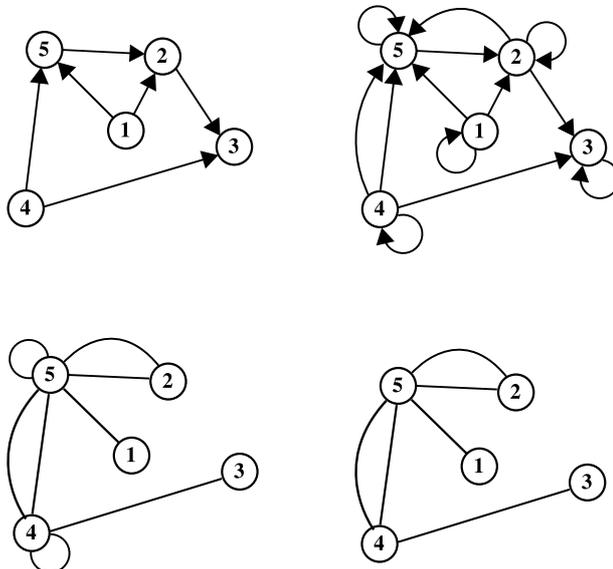


### Tema 3: TEORÍA DE GRAFOS.

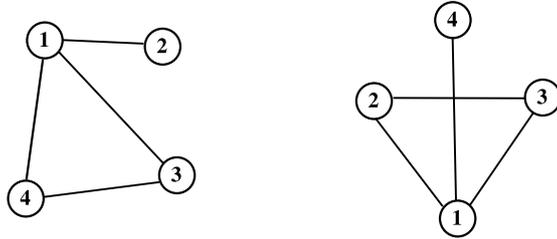
1. Dado el grafo  $G = (V, E)$  donde  $V = \{a, b, c, d, e\}$  y  $E = \{ab, bc, be, cd, de, ad\}$ , construir una representación gráfica de  $G$ .
2. Escribir explícitamente el conjunto de vértices y de aristas del grafo  $G$  dado por la siguiente figura:



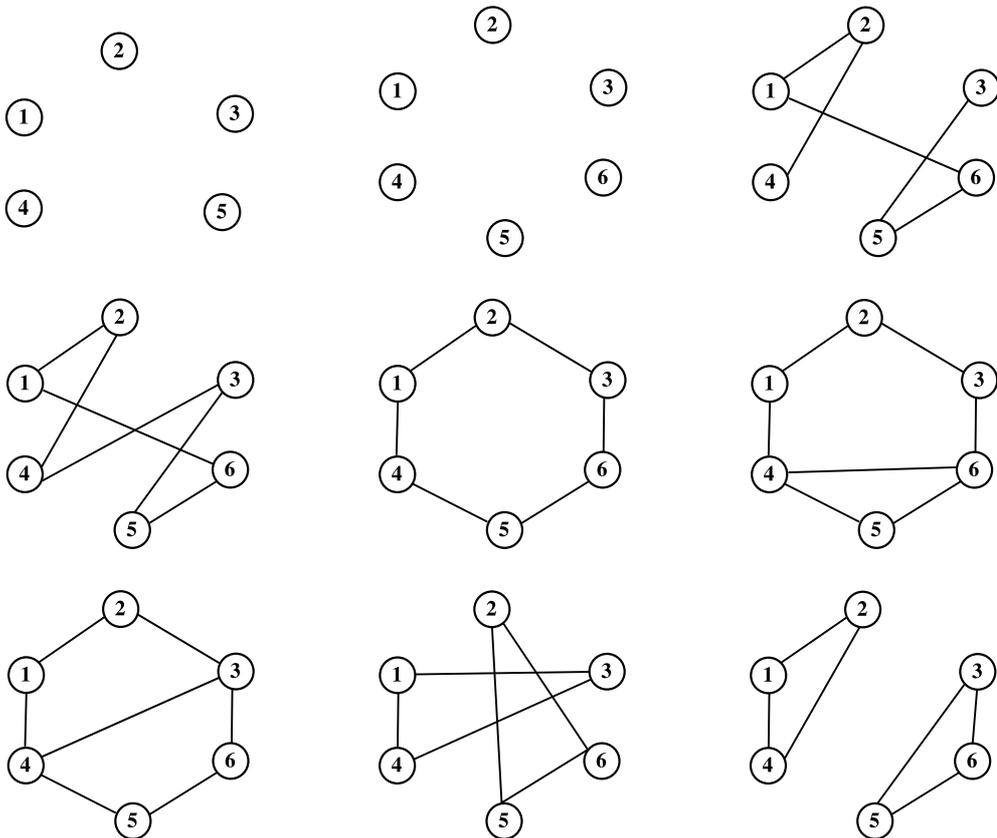
3. Decir de qué tipo es cada uno de los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas:



4. Construir dos isomorfismos distintos entre los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas:

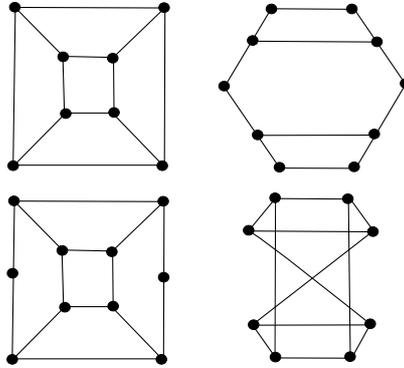


5. Estudiar cuáles de los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas son isomorfos entre sí. Para los que sean isomorfos, dar el isomorfismo y para los que no, razonarlo.

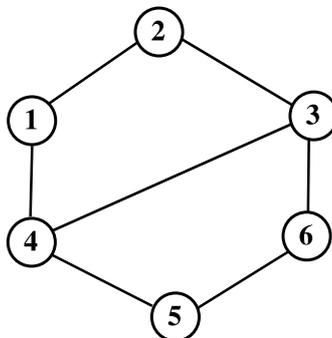


6. Estudiar cuáles de los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas son isomorfos entre sí. Para los que sean isomorfos, dar el isomorfismo y para los que no,

razonarlo.



7. De todos los grafos con 5 vértices y 7 aristas, ¿cuántos se pueden construir de modo que no haya dos isomorfos?
8. De todos los grafos con 4 vértices y 7 aristas, ¿cuántos se pueden construir de modo que no haya dos isomorfos?
9. De todos los grafos con 8 vértices y 7 aristas, ¿cuántos se pueden construir de modo que no haya dos isomorfos?
10. De todos los grafos con 8 vértices y grado de cada vértice 1, ¿cuántos se pueden construir de modo que no haya dos isomorfos?
11. De todos los grafos con 8 vértices y grado de cada vértice 2, ¿cuántos se pueden construir de modo que no haya dos isomorfos?
12. De todos los grafos con 6 vértices y grado de cada vértice 0, 1 ó 2, ¿cuántos se pueden construir de modo que no haya dos isomorfos?
13. Hallar todos los subgrafos del grafo representado por la siguiente figura:



14. Sea  $G$  un grafo regular de grado  $k$  con  $n$  vértices. ¿Cuántas aristas tiene?
15. Sea  $G$  un grafo regular de grado  $k$  con  $n$  aristas. ¿Cuántos vértices tiene?
16. a) Probar que para todo grafo  $G = (V, E)$  se verifica que:

$$\text{Card}(E) \leq \frac{1}{2} \text{Card}(V) (\text{Card}(V) - 1)$$

- b) Sea  $G = (V, E)$  un grafo tal que:

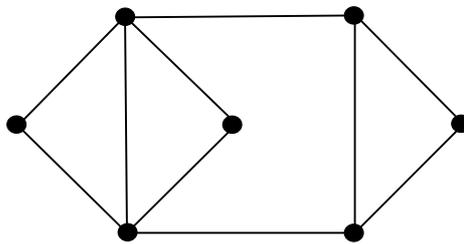
$$\text{Card}(E) = \frac{1}{2} \text{Card}(V) (\text{Card}(V) - 1)$$

Probar que  $G$  es completo.

17. Encontrar un subgrafo 2-regular de  $K_4$  no isomorfo a  $K_3$  y otro que si lo sea.
18. Encontrar dos subgrafos 3-regulares de  $K_6$  no isomorfos a  $K_4$  y otro que si lo sea.
19. Probar que todo grafo regular de orden impar tiene un número par de vértices.
20. Sobre el subconjunto  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  de los números naturales, se considera la relación "ser menor o igual que". Estudiar qué tipo de relación es y representarla gráficamente mediante un grafo. ¿Qué tipo de grafo se obtiene?
21. Estudiar si son conexos o desconexos los siguientes grafos, indicando el número de componentes conexas de cada uno de ellos, el grado de cada uno de sus vértices y si son eulerianos o hamiltonianos:
- a)  $G = (V, E)$  donde  $V = \{A, B, C, D\}$  y  $E = \{AB, AD, BC, BD, CD\}$ .
- b)  $G = (V, E)$  donde  $V = \{A, B, C, D, E\}$  y  $E = \{AB, AC, BC, DE, \}$ .

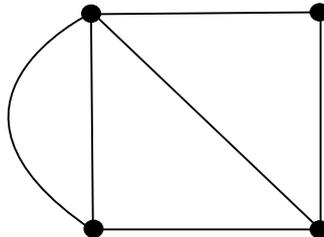
22. Encontrar para el grafo representado por la siguiente figura:

- a) Dos caminos distintos que conecten  $v_1$  con  $v_4$ .
- b) Un camino simple de longitud 5 entre  $v_1$  y  $v_4$ .
- c) Un camino de longitud 6 entre  $v_1$  y  $v_4$ .
- d) Un camino cerrado de longitud 6 con origen en  $v_1$ .
- e) Un ciclo de longitud 3, otro de longitud 4 y otro de longitud 6.
- f) Un circuito de longitud 9



23. Dado multigrafo representado por la siguiente figura, encontrar:

- a) Un ciclo de longitud 2.
- b) Un circuito de longitud 6.



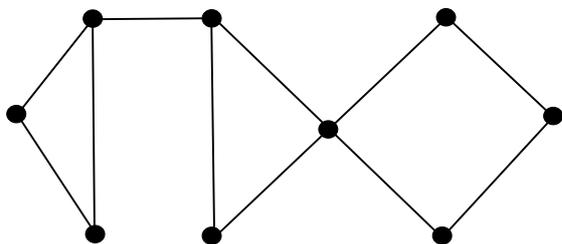
24. Probar que un multigrafo es un grafo si y solo si no tiene ciclos de longitud dos.

25. Probar que en un grafo conexo  $G = (V, E)$  se verifica que:

$$\text{Card}(V) - 1 \leq \text{Card}(E).$$

26. Sea  $G = (V, E)$  un grafo conexo.

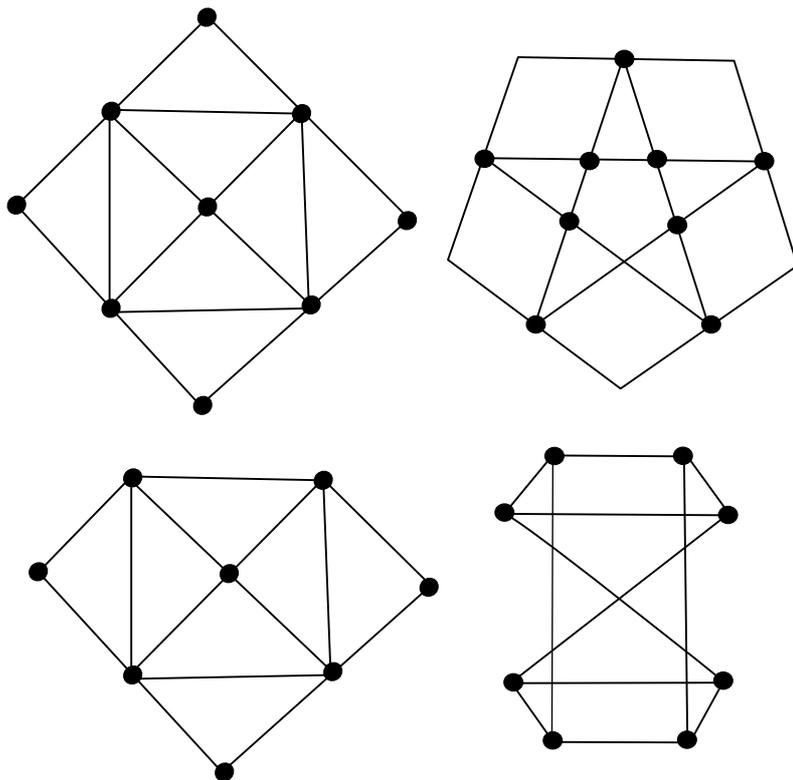
Se llama *punto de corte* a un vértice  $v$  de  $G$  tal que el subgrafo  $G_v$  de  $G$  con vértices en  $V - \{v\}$  y cuyas aristas son las de  $E$  que tienen vértices en  $V - \{v\}$  no es conexo.



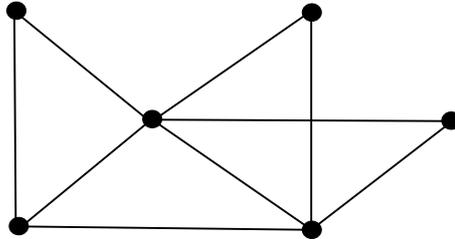
Se llama *itmo* a una arista  $e$  de  $E$  tal que el subgrafo  $(V, E - \{e\})$  no es conexo.

Hallar los puntos de corte y los itmos del grafo representado en la figura.

27. Sea  $G = (V, E)$  un grafo conexo con un itmo. Probar que en tal caso  $G$  contiene algún vértice de grado impar.
28. Determinar cuáles de los grafos representados por las siguientes figuras se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista, en caso afirmativo, encontrar el modo de dibujarlos con las propiedades deseadas:



29. Una empresa de autopistas ha contratado a una empresa de seguridad para que patrulle la red de autopistas cuyo mapa está esquematizado en la siguiente representación gráfica:

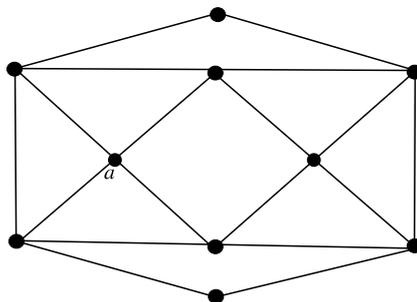


La empresa de seguridad quiere realizar el servicio con un solo vehículo y quiere determinar la existencia un recorrido de la red de modo que se vigilen los tramos de la autopista una única vez. ¿Existe tal recorrido? ¿Cuál es? ¿Es solución única?

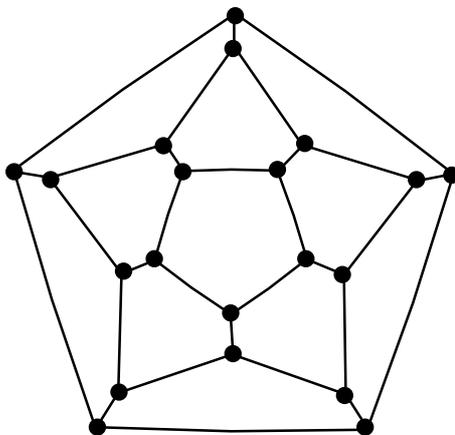
30. Los siguientes resultados sobre grafos son conocidos:
- Si un grafo  $G$  es euleriano, entonces todo vértice tiene grado par.
  - Si un grafo  $G$  tiene un camino euleriano no cerrado, entonces tiene exactamente dos vértices de grado impar.
  - Si todos los vértices de un grafo conexo tiene grado par, entonces dicho grafo es euleriano.
  - Si un grafo conexo tiene exactamente dos vértices con grado impar, entonces admite un camino euleriano no cerrado.

¿Son válidos estos resultados sustituyendo la palabra grafo por multigrafo?

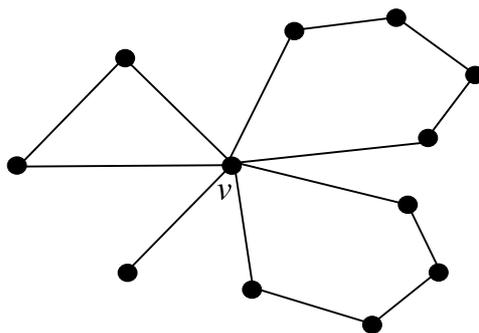
31. Encontrar para el grafo de la figura siguiente un circuito euleriano distinto del obtenido en clase, con origen y fin en el vértice  $a$ :



32. Encontrar un ciclo hamiltoniano para el grafo de la siguiente figura:



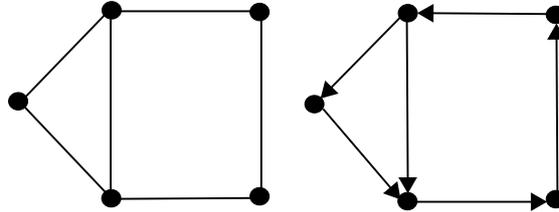
33. Probar que todo grafo completo es hamiltoniano.
34. Sea  $G = (V, E)$  el grafo dado por la siguiente representación gráfica:



Sea  $G'$  el subgrafo de  $G$  cuyos vértices son  $V - \{v\}$  y sus aristas son todas las de  $E$  que no tiene por extremo a  $v$ . ¿Cuántas componentes conexas tiene  $G'$ ?

35. ¿Es hamiltoniano el grafo del problema anterior? Probar que todo grafo con un punto de corte no es hamiltoniano.
36. Sea  $K_n$  el grafo completo de  $n$  vértices. Deducir para qué valores de  $n$   $K_n$  es euleriano y para qué valores de  $n$   $K_n$  es hamiltoniano.
37. Probar que un grafo regular, conexo, con un número par de vértices y un número impar de aristas, no es euleriano.

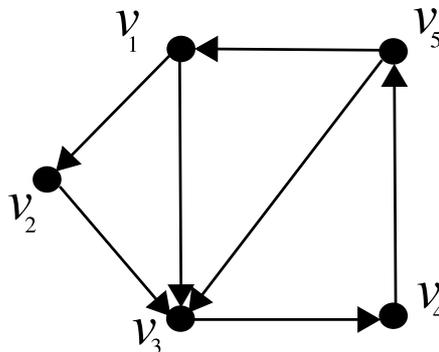
38. Hallar la matriz de adyacencia del grafo y digrafo dados por las siguientes representaciones gráficas:



39. Hallar la matriz de adyacencia del grafo completo  $K_p$ , para  $p \geq 1$ . Caracterizar algebraicamente las matrices de adyacencia de los grafos completos de  $p$  vértices y de los grafos  $n$ -regulares.
40. Probar que las siguientes matrices son matrices de adyacencia de grafos isomorfos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

41. Establecer un criterio algebraico para saber si dos matrices dadas son las matrices de adyacencia de dos grafos isomorfos.
42. Definir la matriz de adyacencia de un multigrafo, y caracterizar algebraicamente la matriz de adyacencia de un multigrafo que no es un grafo.
43. Estudiar si en el digrafo representado por la siguiente figura existe algún camino entre  $v_2$  y  $v_5$ . Responder primero utilizando matrices de adyacencia, y después, sin hacer uso de tales matrices.



44. Sea  $G$  un grafo y  $M$  su matriz de adyacencia. Se suponen conocidos los siguientes resultados de teoría de grafos:

- a) El coeficiente  $m_{i,j}^n$  de la matriz  $M^n$  es el número de caminos de longitud  $n$  con extremos  $v_i$  y  $v_j$ .
- b) Supongamos que  $G$  tiene  $p$  vértices. Sea  $C = M^p + M^{p-1} + \dots + M$ . Existe un camino entre los vértices  $v_i$  y  $v_j$  si y solo si el coeficiente  $c_{i,j}$  de la matriz  $C$  es no nulo.
- c) Si  $C$  es la matriz definida en el apartado anterior, el grafo  $G$  es conexo si y solo si todos los coeficientes de  $C$  son no nulos.

¿Serán ciertos estos resultados si se sustituye la palabra grafo por multigrafo?

45. La siguiente matriz de adyacencia corresponde a un grafo que representa, para una cierta zona, los lugares de interés turístico y las vías de comunicación que los unen.

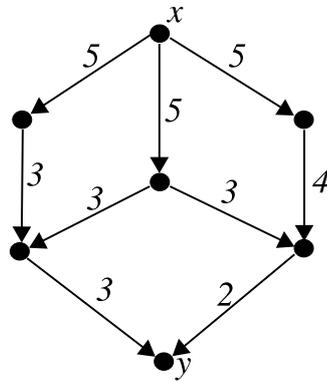
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Encontrar, si es posible, un ciclo que pase por todos los lugares de interés.
- b) Encontrar, si es posible, un circuito que pase por todas las vías de comunicación.
- c) ¿Es plano el grafo que representa esa matriz?

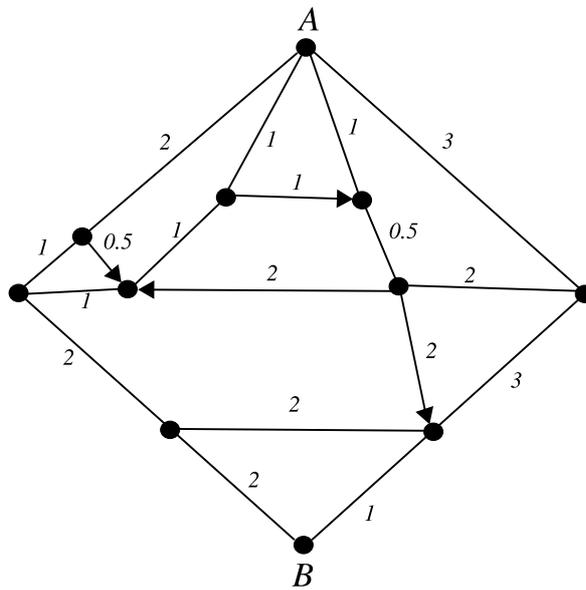
46. Probar que todo subgrafo conexo de un árbol es también un árbol.

47. Probar que todo grafo conexo con menor número de aristas que de vértices debe ser un árbol.

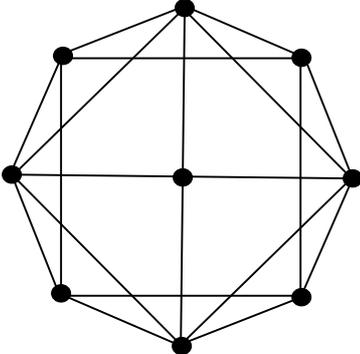
48. Obtener la distancia entre el vértice  $x$  y el vértice  $y$  en el digrafo etiquetado representado por la siguiente figura:



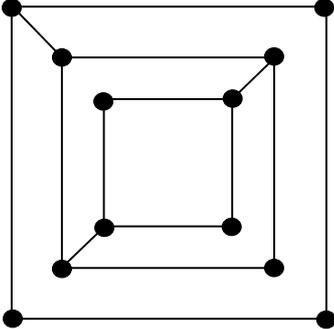
49. El siguiente mapa representa las calles de una ciudad entre dos puntos  $A$  y  $B$ . Cada etiqueta representa la longitud de la correspondiente calle. Según se indica en el mapa, algunas de las calles tienen dirección única. Encontrar la distancia entre  $A$  y  $B$  y entre  $B$  y  $A$ .



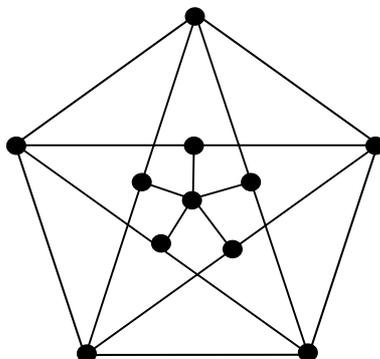
50. Demostrar que el grafo representado por la siguiente figura es plano, encontrar un mapa que lo represente y el pseudomultigrafo dual de tal mapa:



51. Encontrar el grado de cada una de las regiones del siguiente mapa:

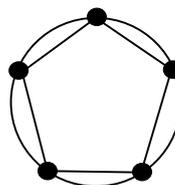
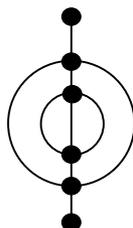
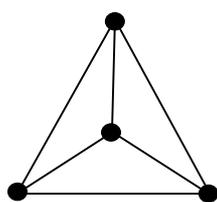


52. Estudiar si es plano el grafo representado por la siguiente figura:

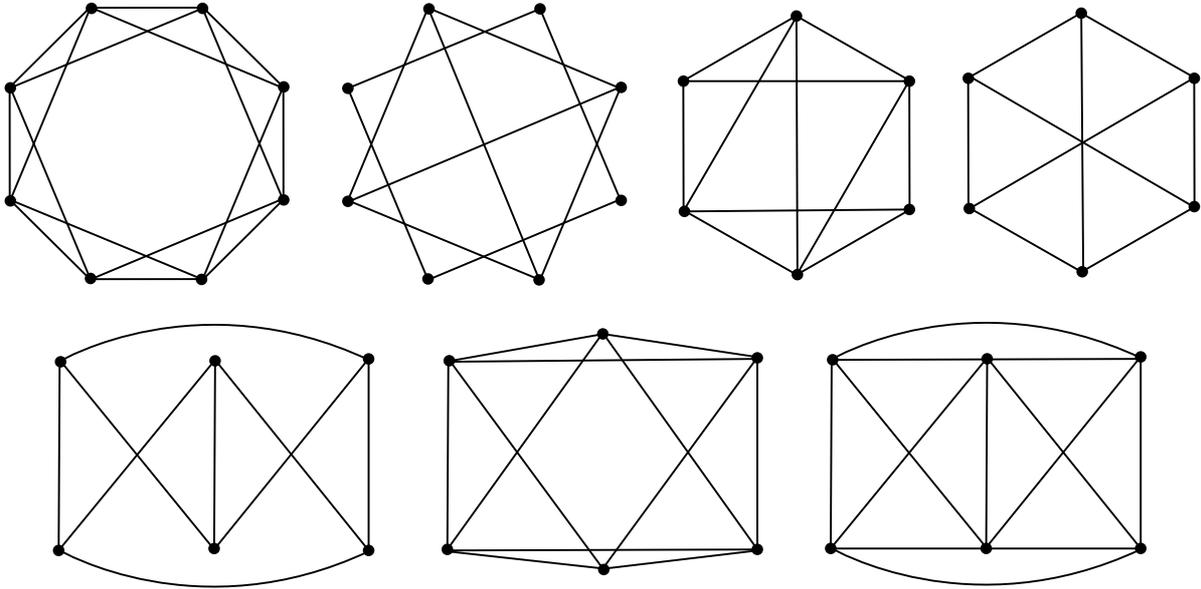


53. Para cada uno de los siguientes mapas, encontrar:

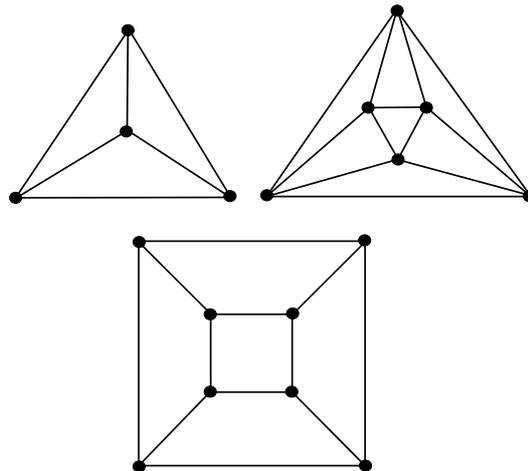
- a) Mínimo número de colores que se necesitan para colorearlos.
- b) Grafo dual de cada uno de ellos.



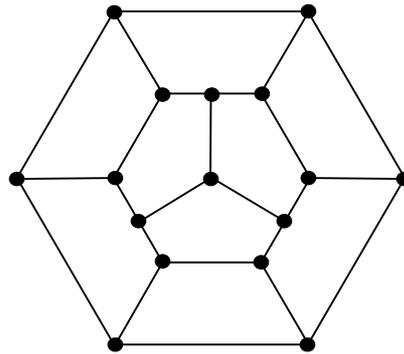
54. Encontrar, si es posible, una representación plana de cada uno de los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas, en caso contrario, probar que contienen un subgrafo isomorfo a una partición de  $K_5$  o de  $K_{3,3}$ :



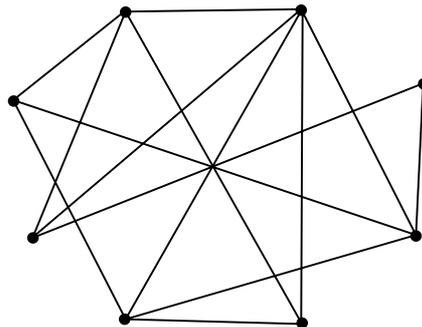
55. Estudiar qué grafos completos son planos y cuáles no.
56. Hallar los pseudografos duales de los mapas que representan los siguientes poliedros regulares. ¿Se obtiene algún grafo que no está representado en tales mapas?



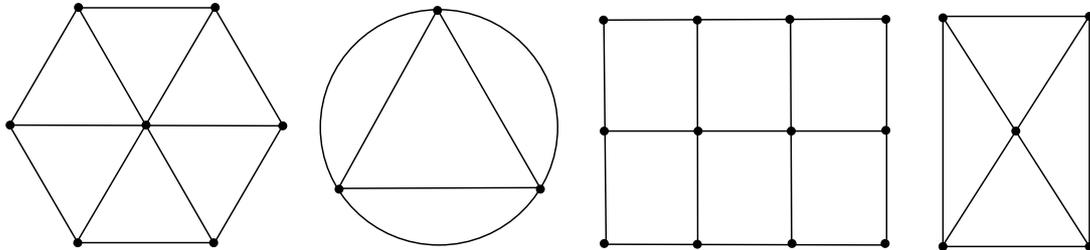
57. Probar que en todo grafo plano conexo existe al menos un vértice cuyo grado es, a lo más, cinco.
58. Hallar una condición necesaria y suficiente para que  $K_p$  sea bipartito.
59. Probar que son necesarios al menos tres colores para colorear las regiones del siguiente mapa, de modo que regiones adyacentes tengan colores distintos:



60. Probar que un multigrafo es bipartito si y solo si no contiene ciclos de longitud impar.
61. Dado un mapa, encontrar una condición necesaria y suficiente para que necesite más de tres colores para colorear sus regiones.
62. Estudiar si el grafo representado por la siguiente figura es plano y, en caso afirmativo, colorear un mapa que lo represente:



63. ¿Cuántos colores son necesarios para colorear las regiones de cada uno de los siguientes mapas?



64. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones relativas a grafos:
- ¿Puede existir un grafo con 15 vértices todos ellos de grado 5?
  - Sea  $G = (V, E)$  un grafo conexo y plano con 8 vértices todos ellos de grado 3, ¿en cuántas regiones divide al plano un mapa asociado a dicho grafo?
65. Probar que en todo mapa conexo, si el número de aristas es menor o igual que 29, entonces hay algún vértice cuyo grado es menor o igual que 4. (Se sugiere utilizar, entre otras, la Fórmula de Euler).
66. Tenemos nueve paquetes informáticos instalados en ocho ordenadores del siguiente modo:

ORDENADORES:	1	2	3	4	5	6	7	8
PAQUETES:	1,2,6,9	2,7,8	4,6	3,5,8	6,7,9	1,2,3,4,6	8,9	1,2,6

Queremos distribuir los ordenadores en salas, de modo que los que estén en la misma sala no tengan ningún paquete en común. Demostrar que 5 salas son suficientes para tal distribución y que para tal distribución son necesarias, al menos, 5 salas.