Ejercicios Ampliación de Ecuaciones diferenciales

1. Obtener las órbitas del sistema dinámico discreto asociado a la función $F(x) = 2x$. Idem para $F(x) = x$ y $F(x) = 1 - x$.

2. Obtener los puntos de equilibrio y los retratos de fase de los sistemas dinámicos discretos asociado a las funciones

   - $F(x) = x$.
   - $F(x) = 2x$.
   - $F(x) = 1 - x$.
   - $F(x) = x^2 - 1$ (sólo los puntos de equilibrio).
   - $F(x) = x^2 + 1$.
   - $F(x) = x^2 - x$.

3. Determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas dinámicos de los ejercicios anteriores.

4. Consideremos el sistema dinámico discreto asociado a la función $F(x) = 2x$ si $|x| \leq 1$ y $F(x) = 0$ si $|x| > 1$. Probar que el origen es un atractor pero no es estable.

5. En los sistemas dinámicos discretos de los ejercicios anteriores, determinar si existen estados iniciales periódicos.

6. Reducir las siguientes ecuaciones diferenciales a un sistema autónomo de primer orden:

   (a) Ecuación del péndulo simple: $x'' + \sin(x) = 0$.

   (b) Oscilador de Van der Pol forzado (μ, A, ω son parámetros):

   $$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = A\cos(\omega t).$$

   (c) Ecuación logística con cosecha periódica (r, K, h son parámetros):

   $$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - h(1 - \cos(t))$$

   (d) Problema circular de tres cuerpos restringido:

   $$\begin{aligned}
   \ddot{x} =& x + 2\dot{y} - \left(\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu(x-(1-\mu))}{r_2^3}\right), \\
   \ddot{y} =& y - 2\dot{x} - \left(\frac{(1-\mu)y}{r_1^3} + \frac{\mu y}{r_2^3}\right), \\
   \ddot{z} =& -\left(\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} + \frac{\mu z)}{r_2^3}\right),
   \end{aligned}$$

   donde

   $$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2)}, \quad r_2 = \sqrt{(x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2)}.$$

7. Calcular el flujo asociado, φ a cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

    (a) $x' = 1$.

    (b) $x' = 2x$ (crecimiento exponencial).

    (c) $x' = x(1-x)$ (ecuación logística).

    (d) $x' = x^2 - 1$.

    (e) $x'' + x = 0$ (oscilador armónico simple).

    (f) $x' = ax + by,\ y' = -bx + ay$ (centro-foco lineal).

8. Demostrar que $\varphi(t,x) = e^t(1+x) - 1$ es un sistema dinámico continuo, y hallar el campo vectorial del cual es flujo.

9. Calcular la derivada respecto de las condiciones iniciales de los siguientes sistemas autónomos.

    (a) $x' = x$.

    (b) $x' = x^2$.

    (c) $x' = x + y, y' = x - y$.

10. Sea $x\colon \mathbb{R} \to U$ continua y periódica. Demuestre que el $\{T > 0 : T \text{ es un periodo de } x\}$ es un subgrupo aditivo no trivial de $\mathbb{R}$ que además es cerrado.

11. Deduzca del ejercicio anterior que o bien

$$\{T > 0 : T \text{ es un periodo de } x\} = T\mathbb{Z}, \quad T > 0,$$

    bien es denso en $\mathbb{R}$.

12. Obtener los diagramas de fases de los siguientes sistemas autónomos:

    (a) $x' = x$.

    (b) $x' = x(1-x)$.

    (c) $x' = (1-x)e^{x^2}$.

    (d) $x' = y,\ y' = -x$.

    (e) $x' = x,\ y' = y$.

13. Calcular el flujo paramétrico $\varphi(t,x,a,b)$ de la ecuación logística $z' = az - bz^2$, indicando su dominio. Obtener y resolver las ecuaciones variacionales lineales asociadas a las derivadas parciales del flujo respecto de las variables x, a, b, y comparar los resultados con los conseguidos al derivar directamente la fórmula para $\varphi(t,x,a,b)$.

14. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente lipschitziana con un número finito de ceros. Estudie la recta de fases de la ecuación diferencial $x' = f(x)$.

15. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente lipschitziana con un número finito de ceros. Dibuje el plano de fases del sistema diferencial

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & f(x) \\ y' & = & y. \end{array}\right.$$

16. Calcular las soluciones y dibujar el plano de fases del sistema diferencial

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & y^2. \end{array}\right.$$

17. Sea C una curva cerrada simple en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (con $n \geq 2$), y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo C^1. Supongamos que C no contiene puntos de equilibrio de f, y que $O_x \subseteq C$. Demostrar que entonces $O_x = C$, y en particular la curva $t \mapsto \Phi(t, x)$ es periódica.

18. Sea C un conjunto homeomorfo a una recta en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo C^1. Supongamos que C no contiene puntos de equilibrio de f, y que $O_x \subseteq C$. Probar que entonces $O_x = C$, y en particular la curva $t \mapsto \Phi(t, x)$ es inyectiva.

19. Demuestre que $F(x_1, \ldots, x_n)$ es una integral primera de

$$x_1' = f_1, \ldots x_n' = f_n, \qquad f_1 \neq 0,$$

si y solo si es una integral primera de

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1}, \ldots, \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1}$$

20. Calcular una integral primera para los sistemas diferenciales siguientes y dibujar su plano de fases:

a) $x' = x, \quad y' = -y.$

b) $x' = y, \quad y' = -x.$

c) $x' = x(1-y), \quad y' = -y(1-y).$

d) $x' = y(1+x+y), \quad y' = -x(1+x+y).$

e) $x' = y(1+x^2+y^2), \quad y' = -x(1+x^2+y^2).$

f) $x' = y, \quad y' = 1 + x^2.$

g) $x' = x, \quad y' = y^2.$

21. Probar que toda solución de la ecuacion diferencial $x'' + x + x^3 = 0$ es periódica.

22. Probar que todo sistema de la forma

$$\begin{cases} x' = f(y) \\ y' = g(x) \end{cases}$$

admite una integral primera de la forma $H(x, y) = A(x) + B(y)$.

23. **Teorema de conservación de la energía**. Consideremos un sistema $x'' = f(x)$, donde $f(x) = -\nabla U(x)$, siendo $U \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Se define la energía cinética del sistema como

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2,$$

la energía potencial como $U(x)$, y la energía total como

$$E(t) = T(\dot{x}(t)) + U(x(t)).$$

Probar que se tiene

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0$$

para todo t, es decir, la energía total del sistema permanece constante a lo largo de cada curva integral.

Se dice que un sistema de esta forma es un sistema conservativo.

24. Sea el sistema diferencial en el plano $x' = y, \quad y' = -\sin x$ que representa el movimiento de un péndulo sin fricción. Estudiar cualitativamente el plano de fases.

25. Sea la ecuación diferencial

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -y + x(x^2+y^2)(1-x^2-y^2) \\ y' & = & x + y(x^2+y^2)(1-x^2-y^2) \end{array}\right. \tag{0.1}$$

Probar que para cada $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\omega(\xi) = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}.$$