

**Lema 1.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa, entonces existe  $\alpha > 0$  y un producto interior en  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$\langle Ax, x \rangle < -\alpha|x|^2, \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

*Proof.* La idea fundamental de la demostración consiste en modificar el producto interior del espacio de manera que, en una base adecuada, la matriz asociada a  $A$  sea estrictamente negativa en el sentido cuadrático. Para ello trabajaremos con la forma de Jordan real de  $A$  y aplicaremos un reescalado apropiado en cada bloque.

Como todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa, podemos escribir  $A$  en forma de Jordan real. Es decir, existe una matriz invertible  $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tal que

$$B = S^{-1}AS$$

es una matriz por bloques, donde cada bloque corresponde a un autovalor real  $\lambda < 0$  o a un par complejo conjugado  $\lambda = \alpha + i\beta$  con  $\alpha < 0$ . Los bloques tienen la forma habitual:

- Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces el bloque de Jordan asociado es

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

- Si  $\lambda = \alpha + i\beta$  es complejo con  $\alpha < 0$ , el bloque real asociado viene dado por

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} C & I_2 & & 0 \\ & C & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & C \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Nuestro objetivo es modificar la base de modo que, en la nueva base, el producto interior canónico satisfaga

$$\langle Bx, x \rangle_0 = x^\top Bx < -\alpha|x|^2, \quad x \neq 0,$$

donde  $-\alpha$  es mayor que el máximo de las partes reales de los autovalores.

**Reescalado en un bloque real.** Consideremos primero un bloque real  $J_\lambda$  con  $\lambda < 0$ . Sea  $m$  su tamaño. Introducimos un reescalado de las coordenadas dado por la matriz diagonal

$$D = \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{m-1}), \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Conjugamos  $J_\lambda$  mediante  $D$  y obtenemos

$$\tilde{J}_\lambda = D^{-1}J_\lambda D.$$

Un cálculo directo muestra que la parte diagonal proporciona el término

$$\lambda(x_1^2 + \cdots + x_m^2),$$

mientras que las entradas no diagonales generan un término de la forma

$$\varepsilon \varphi(x) = \varepsilon (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_{m-1} x_m).$$

Puesto que  $\phi$  es continua y la esfera unidad es compacta,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) \\ &= |x|^2 \varphi\left(\frac{x}{|x|}\right) \leq M|x|^2, \end{aligned}$$

Puesto que  $\lambda < 0$ , tomando  $\varepsilon$  suficientemente pequeño obtenemos

$$x^\top \tilde{J}_\lambda x \leq \frac{\lambda}{2} \|x\|^2 \quad (x \neq 0).$$

**Reescalado en un bloque complejo.** Consideremos ahora un bloque complejo real  $J_\lambda$  asociado a  $\lambda = \alpha + i\beta$  con  $\alpha < 0$ . Reescalamos las coordenadas por pares, mediante una matriz diagonal del tipo

$$D = \text{diag}(1, 1, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^2, \dots).$$

Del mismo modo que antes, al conjugar,

$$\tilde{J}_\lambda = D^{-1} J_\lambda D,$$

aparece una parte principal dada por

$$\alpha(x_1^2 + \cdots + x_{2m}^2)$$

y una perturbación de orden  $\varepsilon$  similar a la anterior. Como  $\alpha < 0$ , basta escoger  $\varepsilon$  pequeño para asegurar que

$$x^\top \tilde{J}_\lambda x \leq \frac{\alpha}{2} \|x\|^2, \quad x \neq 0.$$

**Construcción del producto interior buscado.** Aplicamos los reescalados anteriores simultáneamente en todos los bloques de Jordan de  $B$ , obteniendo así una matriz diagonal por bloques  $D$ . Entonces

$$\tilde{B} = D^{-1} B D$$

satisface

$$x^\top \tilde{B} x < 0 \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

En la base original, esto significa que definimos el producto interior

$$\langle u, v \rangle = \langle D^{-1} S^{-1} u, D^{-1} S^{-1} v \rangle_0,$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  es el producto interior canónico. Con esta definición se verifica

$$\langle Au, u \rangle = x^\top \tilde{B} x < \frac{\alpha}{2} |x|^2, \quad x = D^{-1} S^{-1} u \neq 0,$$

donde  $\alpha$  es el máximo de las partes reales de los autovalores, lo cual completa la demostración.  $\square$