Ampliación de Ecuaciones Diferenciales

Tema 2. Sistemas conjugados y clasificación de flujos lineales

José Luis Bravo

Grado en Matemáticas / Doble Grado en Matemáticas y Estadística

Curso 2026/2027

Índice

SECCIÓN 1

Campos conjugados

Cambios de coordenadas y equivalencia dinámica

Campos conjugados

La idea de cambiar de coordenadas

Consideremos el sistema autónomo

$$x' = f(x), \qquad x \in U \subset \mathbb{R}^n,$$

y un cambio de coordenadas $y = h(x)$, donde $h : U \to V$ es un difeomorfismo.

Derivando $y = h(x)$ a lo largo de una solución,

$$y' = Dh(x)x' = Dh(x)f(x).$$

Idea clave

El cambio de coordenadas transforma el campo vectorial y lleva las trayectorias del sistema original a las del sistema transformado.

Campos conjugados

Transformación de un campo

Si $y = h(x)$, el campo transformado g en las nuevas coordenadas queda definido por

$$g(y) = Dh\big(h^{-1}(y)\big) f\big(h^{-1}(y)\big).$$

Equivalentemente, $g(h(x)) = Dh(x) f(x)$.

Lectura de la fórmula

La matriz diferencial $Dh(x)$ transforma el vector velocidad $f(x)$ en la velocidad correspondiente en las coordenadas y.

El cambio no altera el parámetro temporal: se transforman las trayectorias, no la velocidad del reloj.

Campos conjugados

Conjugación de flujos

Sean Φ_f y Φ_g los flujos, con dominios $D_f \subset \mathbb{R} \times U$ y $D_g \subset \mathbb{R} \times V$, y sea $h : U \to V$ un homeomorfismo.

Definición

Los flujos son *topológicamente conjugados* si

$$h\big(\Phi_f(t,x)\big) = \Phi_g\big(t, h(x)\big)$$

siempre que $(t,x) \in D_f$; además, $(t,x) \in D_f$ si y sólo si $(t,h(x)) \in D_g$.

Interpretación

Primero se evoluciona con el flujo f y después se aplica h, o se transforma el estado inicial con h y se evoluciona con g: el resultado coincide.

Campos conjugados

Campos conjugados

Si f y g son campos diferenciables y h es un difeomorfismo, la condición

$$g(h(x)) = Dh(x)f(x)$$

garantiza que h lleva soluciones de $x' = f(x)$ a soluciones de $y' = g(y)$.

Teorema

Dos campos diferenciables relacionados por un cambio de coordenadas son conjugados: sus flujos satisfacen

$$h \circ \Phi_f(t, \cdot) = \Phi_g(t, \cdot) \circ h.$$

La conjugación topológica permite usar homeomorfismos, aunque no sean diferenciables.

Campos conjugados

Qué conserva una conjugación

Una conjugación lleva objetos dinámicos de un sistema a los correspondientes del otro:

- Puntos de equilibrio a puntos de equilibrio.
- Órbitas a órbitas y órbitas periódicas a órbitas periódicas.
- El diagrama de fases de un sistema al del otro.

No tiene por qué conservar distancias, ángulos, longitudes ni los valores de los autovalores.

Importante

En la conjugación de flujos se conserva el mismo tiempo t. No debe confundirse con una equivalencia orbital, que puede permitir reparametrizar el tiempo.

Campos conjugados

Ejemplo de cambio de coordenadas

Consideremos

$$x' = 1, \qquad y' = x,$$

y definamos el cambio $u = x, v = y - \frac{x^2}{2}$.

Entonces

$$u' = 1, \qquad v' = y' - xx' = x - x = 0.$$

El cambio $h(x, y) = (x, y - \frac{x^2}{2})$ es un difeomorfismo, con inversa

$$h^{-1}(u, v) = \left(u, v + \frac{u^2}{2}\right).$$

Por tanto, el sistema original es conjugado al campo constante $(u', v') = (1, 0)$.

SECCIÓN 2

Flujo tubular

Forma local del flujo cerca de puntos regulares

Flujo tubular

Puntos regulares y puntos de equilibrio

Sea $x' = f(x)$ y x_0 un punto del espacio de estados.

Punto regular

Se dice que x_0 es regular si $f(x_0) \neq 0$.

En un entorno suficientemente pequeño de un punto regular, el campo mantiene una dirección no nula y las órbitas atraviesan el entorno.

El caso de los puntos de equilibrio, donde $f(x_0) = 0$, requiere herramientas distintas y será el centro del estudio de la estabilidad.

Flujo tubular

Teorema del flujo tubular

Teorema (Flujo tubular)

Sea f un campo de clase C^k y sea x_0 un punto regular. Existen entornos U de x_0 y V del origen, y un difeomorfismo local $h : U \to V$ que transforma el campo f en el campo constante

$$g(y) = (1, 0, \ldots, 0).$$

Así, en las coordenadas adecuadas, las órbitas locales son segmentos paralelos al primer eje.

Flujo tubular

Conexión con el cambio de coordenadas

En el ejemplo anterior, el campo

$$x' = 1, \qquad y' = x.$$

nunca se anula. El cambio $u = x, v = y - \frac{x^2}{2}$ lo transforma en $(u', v') = (1, 0)$.

En este caso el enderezamiento es global. El teorema del flujo tubular afirma que para cualquier campo diferenciable el mismo tipo de simplificación es posible localmente alrededor de cada punto regular.

SECCIÓN 3

Flujos lineales hiperbólicos

Índice de estabilidad y clasificación topológica

Flujos lineales hiperbólicos

Recordatorio: sistemas lineales

Consideremos el sistema lineal autónomo

$$x' = Ax, \qquad x(t) = e^{tA}x_0.$$

Definición

La matriz A es *hiperbólica* si ninguno de sus autovalores tiene parte real nula.

Los métodos para resolver este sistema se suponen conocidos. Aquí nos interesa qué rasgos de su diagrama de fases permanecen bajo conjugación topológica.

Flujos lineales hiperbólicos

Subespacios estable e inestable

Para una matriz hiperbólica A, definimos

$$E^s(A) = \{x : e^{tA}x \to 0 \text{ cuando } t \to +\infty\},$$

$$E^u(A) = \{x : e^{tA}x \to 0 \text{ cuando } t \to -\infty\}.$$

Teorema

Los subespacios $E^s(A)$ y $E^u(A)$ son invariantes por el flujo y

$$\mathbb{R}^n = E^s(A) \oplus E^u(A).$$

El flujo decae exponencialmente en $E^s(A)$ hacia el futuro y en $E^u(A)$ hacia el pasado.

Flujos lineales hiperbólicos

Índice de estabilidad

El *índice de estabilidad* de A es

$$s(A) = \dim E^s(A).$$

Para calcularlo basta contar, con multiplicidad algebraica, los autovalores de A con parte real negativa.

En dimensión dos

- Dos autovalores con parte real negativa: $s(A) = 2$ (sumidero).
- Uno con parte real negativa y otro positiva: $s(A) = 1$ (silla).
- Dos autovalores con parte real positiva: $s(A) = 0$ (fuente).

Flujos lineales hiperbólicos

Modelos canónicos

Si $s = s(A)$, el espacio se descompone como

$$\mathbb{R}^n = E^s(A) \oplus E^u(A), \qquad \dim E^s(A) = s, \quad \dim E^u(A) = n - s.$$

Desde el punto de vista topológico, el flujo es conjugado al modelo

$$\begin{cases} u' = -u, & u \in E^s, \\ v' = v, & v \in E^u. \end{cases}$$

Las tasas de contracción y expansión pueden variar; lo que determina el tipo topológico es la dimensión de la parte estable.

Flujos lineales hiperbólicos

Teorema de clasificación

Teorema

Sean A y B matrices hiperbólicas de $\mathbb{R}^n$. Los flujos de

$$x' = Ax \qquad \text{y} \qquad y' = By$$

son topológicamente conjugados si y sólo si

$$s(A) = s(B).$$

En particular, toda la información topológica de un flujo lineal hiperbólico queda determinada por su índice de estabilidad.

Flujos lineales hiperbólicos

Ejemplos de clasificación

Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

tienen índice 1. Sus flujos son topológicamente conjugados, aunque sus tasas de contracción y expansión difieren.

En cambio,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene índice 0, así que su flujo no es conjugado al de A.

Flujos lineales hiperbólicos

Qué distingue la clasificación

La conjugación topológica conserva el tipo de equilibrio y la dimensión estable, pero no distingue:

- Las magnitudes de los autovalores.
- Los ángulos entre direcciones propias.
- Las velocidades concretas de convergencia o divergencia.

La hipótesis de hiperbolicidad es esencial: si algún autovalor tiene parte real cero, este teorema no clasifica el flujo.

Flujos lineales hiperbólicos

Ejercicios

Problema 1

Determina la hiperbolicidad y el índice de estabilidad de una matriz diagonal real a partir de sus entradas. Clasifica el equilibrio correspondiente.

Problema 2

Decide si los flujos de $A = \mathrm{diag}(-2, 3, 4)$ y $B = \mathrm{diag}(-1, -5, 2)$ son topológicamente conjugados. Justifica la respuesta.

Problema 3

Para el campo $x' = 1, y' = x$, verifica el cambio de coordenadas usado para enderezar sus órbitas.

Cierre

Referencia y alcance

- Cambios de coordenadas y conjugación de campos.
- Teorema del flujo tubular en puntos regulares.
- Clasificación de flujos lineales hiperbólicos mediante $s(A)$.

Basado en D. Azagra, *Introducción a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias*, capítulo 6, pp. 73–83.

Se omite el repaso de resolución de sistemas lineales; se utiliza como conocimiento previo.