Ampliación de Ecuaciones Diferenciales

Tema 3. Estabilidad de los sistemas no lineales

José Luis Bravo

Grado en Matemáticas / Doble Grado en Matemáticas y Estadística

Curso 2026/2027

Índice

SECCIÓN 1

Principio de linealización

Estabilidad local a partir de la parte lineal

Principio de linealización

Conexión con el Tema 2

En el Tema 2 clasificamos los flujos lineales hiperbólicos

$$z' = Az.$$

Ahora consideramos un sistema no lineal

$$x' = f(x), \qquad f(x_0) = 0,$$

y preguntamos cuándo su comportamiento cerca de x_0 se parece al de su linealización.

Idea central

La matriz $Df(x_0)$ describe la dinámica de primer orden cerca del equilibrio; la hiperbolicidad determina cuándo esa aproximación es fiable.

Principio de linealización

Recordatorio: estabilidad

Ya vimos estas nociones en el Tema 1; las usamos aquí sin repetir su definición formal.

- **Estable:** las soluciones que empiezan suficientemente cerca permanecen cerca para todo tiempo futuro.
- **Asintóticamente estable:** es estable y, además, las soluciones cercanas convergen al equilibrio.
- **Inestable:** no es estable.

Distinción importante

Ser atractor no implica por sí solo ser estable.

Principio de linealización

La aproximación lineal

Trasladamos el equilibrio al origen mediante $y = x - x_0$. Como $f(x_0) = 0$, el sistema toma la forma

$$y' = Ay + r(y), \qquad A = Df(x_0),$$

$$\frac{\|r(y)\|}{\|y\|} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } y \to 0.$$

El término Ay es la parte lineal y $r(y)$ recoge los términos de orden superior.

No hace falta volver a resolver $y' = Ay$: usamos su espectro para predecir la estabilidad local del sistema original.

Principio de linealización

Teorema de primera aproximación

Teorema (Principio de linealización)

Sea f de clase C^1 y sea x_0 un equilibrio de $x' = f(x)$.

1. *Si todos los autovalores de $Df(x_0)$ tienen parte real negativa, x_0 es asintóticamente estable.*
2. *Si algún autovalor de $Df(x_0)$ tiene parte real positiva, x_0 es inestable.*

El resultado permite clasificar sumideros y detectar inestabilidad a partir de la linealización.

Principio de linealización

Lectura del espectro

- Todas las partes reales negativas: sumidero no lineal, asintóticamente estable.
- Todas positivas: surtidor no lineal, inestable.
- Partes reales de ambos signos: punto de silla, inestable.
- Alguna parte real nula y ninguna positiva: el criterio de linealización no decide.

Hipótesis que recordar

Si ningún autovalor tiene parte real cero, el equilibrio es hiperbólico. Las conclusiones del criterio se aplican directamente.

Principio de linealización

Ejemplos en una dimensión

En ambos ejemplos, $x_0 = 0$ es un equilibrio.

$x' = -x + x^2$

$f'(0) = -1 < 0$. Por el principio de linealización, el origen es asintóticamente estable.

$x' = x + x^2$

$f'(0) = 1 > 0$. El origen es inestable.

Solo se estudia el comportamiento local cerca del equilibrio; el término cuadrático puede afectar a las trayectorias lejos de él.

Principio de linealización

Cuando la linealización no basta

Consideremos

$$x' = -x^3 \qquad \text{y} \qquad x' = x^3.$$

En ambos casos $f'(0) = 0$, de modo que el sistema linealizado es $x' = 0$.

- Para $x' = -x^3$, el origen es asintóticamente estable.
- Para $x' = x^3$, el origen es inestable.

La misma linealización puede corresponder a dinámicas no lineales distintas: cuando aparece un autovalor con parte real cero, hay que estudiar términos de orden superior u otras herramientas.

Principio de linealización

Teorema de Grobman–Hartman

Teorema (Grobman–Hartman)

Si x_0 es un equilibrio de un campo C^1 y $Df(x_0)$ es hiperbólica, los flujos del sistema no lineal y de su linealización son localmente topológicamente conjugados cerca del equilibrio.

Por tanto, no solo se conserva la clasificación de estabilidad: cerca de un equilibrio hiperbólico se conserva el diagrama de fases, salvo cambio continuo de coordenadas.

No se requiere demostrar el teorema en este tema.

Principio de linealización

Ejercicio de aplicación

Estudia la estabilidad del origen en el sistema

$$\begin{cases} x' = x - y + xy, \\ y' = 3x - 2y - xy. \end{cases}$$

1. Comprueba que el origen es un equilibrio.
2. Calcula la matriz $Df(0,0)$ y sus autovalores.
3. Aplica el principio de linealización y clasifica el equilibrio.

SECCIÓN 2

Péndulo con rozamiento

Un ejemplo físico de estabilidad no lineal

Péndulo con rozamiento

Del modelo al sistema autónomo

Un péndulo de longitud ℓ, sometido a gravedad y a rozamiento proporcional a la velocidad angular, satisface

$$\theta'' + c\theta' + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0, \qquad c > 0.$$

Introduciendo la velocidad angular $\omega = \theta'$, se obtiene

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta - c\omega. \end{cases}$$

El rozamiento hace que la energía se disipe y que el péndulo tienda a detenerse cerca de la posición más baja.

Péndulo con rozamiento

Equilibrios y matriz linealizada

Los equilibrios son $(n\pi, 0)$, con $n \in \mathbb{Z}$:

- $\theta = 2k\pi$: posición más baja.
- $\theta = (2k+1)\pi$: posición invertida.

El jacobiano del campo es

$$Df(\theta, \omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{\ell}\cos\theta & -c \end{pmatrix}.$$

Lo evaluamos en las dos posiciones para determinar su estabilidad local.

Péndulo con rozamiento

Posición más baja: estabilidad

En $(0,0)$, la matriz linealizada es

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/\ell & -c \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$\lambda^2 + c\lambda + \frac{g}{\ell} = 0.$$

Como $c > 0$ y $g/\ell > 0$, ambos autovalores tienen parte real negativa.

Conclusión

El principio de linealización garantiza que $(0,0)$ es asintóticamente estable: pequeñas perturbaciones decaen y el péndulo vuelve a la posición más baja.

Péndulo con rozamiento

Posición invertida: inestabilidad

En $(\pi, 0)$, la matriz linealizada es

$$A_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell & -c \end{pmatrix}, \qquad \det A_\pi = -\frac{g}{\ell} < 0.$$

Sus autovalores son reales y de signos opuestos, así que el equilibrio es de tipo silla.

Conclusión

La posición invertida es inestable: una pequeña perturbación en la dirección inestable hace que el péndulo se aleje de ella.

Péndulo con rozamiento

Comparación de las dos posiciones

Equilibrio	Espectro de Df	Tipo local
$(0,0)$	partes reales negativas	sumidero
$(\pi,0)$	signos opuestos	silla

La misma ecuación tiene equilibrios con comportamientos cualitativos muy distintos. La derivada permite identificarlos sin resolver el sistema no lineal.

Péndulo con rozamiento

Ejercicio

Para el sistema del péndulo:

- Analiza el equilibrio $(2\pi, 0)$.
- Explica por qué las conclusiones cerca de $(0, 0)$ no describen automáticamente trayectorias con condiciones iniciales alejadas.
- ¿Qué parte del argumento dejaría de funcionar si un autovalor de la matriz linealizada tuviera parte real cero?

SECCIÓN 3

Variedades estables e inestables

Ampliación: geometría local de los equilibrios hiperbólicos

Variedades estables e inestables

Conjuntos estable e inestable

Para un equilibrio x_0, definimos

$$W^s(x_0) = \{x : \Phi(t, x) \to x_0 \text{ cuando } t \to +\infty\},$$

$$W^u(x_0) = \{x : \Phi(t, x) \to x_0 \text{ cuando } t \to -\infty\}.$$

$W^s(x_0)$ reúne los estados que convergen al equilibrio hacia el futuro; $W^u(x_0)$, los que convergen hacia él al invertir el tiempo.

Caso lineal

Para un sistema lineal hiperbólico, estos conjuntos son los subespacios estable e inestable estudiados en el Tema 2.

Variedades estables e inestables

Teorema de variedad estable

Teorema (Hadamard–Perron, versión local)

Si x_0 es un equilibrio hiperbólico de un campo suficientemente regular, existen variedades estables e inestables locales, tangentes en x_0 a los subespacios estable e inestable de $Df(x_0)$.

Sus dimensiones son, respectivamente, el número de autovalores de $Df(x_0)$ con parte real negativa y positiva, contados con multiplicidad.

Este resultado es complementario; se omite su demostración en este tema.

Cierre

Ideas principales

- En equilibrios hiperbólicos, $Df(x_0)$ determina la estabilidad local mediante el principio de linealización.
- Si aparece un autovalor con parte real cero, este criterio puede ser inconcluso.
- Grobman–Hartman relaciona localmente el diagrama de fases no lineal con el de su linealización.
- El péndulo con rozamiento ilustra un sumidero y un equilibrio inestable de tipo silla.

Basado en D. Azagra, *Introducción a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias*, capítulo 7, pp. 85–95.