Ampliación de Ecuaciones Diferenciales

Tema 4. Series de Fourier e introducción a las EDP

José Luis Bravo

Grado en Matemáticas / Doble Grado en Matemáticas y Estadística

Curso 2026/2027

Índice

Panorama

Tres modelos fundamentales

Una ecuación en derivadas parciales (EDP) relaciona una función u de varias variables con sus derivadas parciales.

- **Calor:** $u_t = \kappa u_{xx}$, evolución difusiva.
- **Ondas:** $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, propagación y vibración.
- **Laplace:** $u_{xx} + u_{yy} = 0$, equilibrio estacionario.

La separación de variables reduce estos problemas a EDO, y las series de Fourier permiten ajustar las condiciones iniciales o de frontera.

SECCIÓN 1

Series de Fourier

Representación de funciones mediante modos trigonométricos

Series de Fourier

Funciones periódicas y modos

Sea f una función de periodo $2L$. Buscamos representarla como una combinación de senos y cosenos:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Los coeficientes se obtienen proyectando sobre las funciones trigonométricas:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx, \qquad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx.$$

Series de Fourier

Ortogonalidad y simetría

En $[-L, L]$, los modos seno y coseno de frecuencias distintas son ortogonales respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^{L} f(x) g(x)\, dx.$$

- Si f es par, entonces $b_n = 0$: solo aparecen cosenos.
- Si f es impar, entonces $a_n = 0$: solo aparecen senos.
- La simetría reduce el cálculo de los coeficientes a integrales sobre $[0, L]$.

Idea

Los coeficientes de Fourier son las coordenadas de f en una base ortogonal de funciones.

Series de Fourier

¿A qué converge la serie?

Si f es periódica y a trozos C^1, su serie de Fourier converge en cada punto x a

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

- En un punto de continuidad, la suma coincide con $f(x)$.
- En un salto, converge al promedio de los límites laterales.
- En los extremos del intervalo, se considera la extensión periódica.

La serie representa a la función en el sentido apropiado; cerca de un salto pueden aparecer oscilaciones (fenómeno de Gibbs).

Series de Fourier

Ejemplo: la función $f(x) = x$

En $(-\pi, \pi)$, $f(x) = x$ es impar, por lo que solo tiene coeficientes seno:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Así,

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \qquad -\pi < x < \pi.$$

En $x = \pm\pi$, la extensión periódica tiene un salto y la serie converge a 0, el promedio de π y $-\pi$.

Series de Fourier

Desarrollos de medio intervalo

Si solo conocemos f en $0 < x < L$, podemos extenderla de forma impar o par:

- Extensión impar: serie de senos,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

- Extensión par: serie de cosenos,

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Las condiciones de frontera del problema suelen indicar cuál de estas bases resulta natural.

Series de Fourier

Ejercicios

1. Calcula la serie de Fourier de $f(x) = |x|$ en $(-\pi, \pi)$. Usa su simetría para simplificar los coeficientes.
2. Desarrolla $f(x) = x$ en serie de senos en $(0, L)$ y determina a qué valor converge en los extremos al considerar la extensión impar.
3. Explica por qué la condición $u(0,t) = u(L,t) = 0$ sugiere usar una serie de senos en los problemas de calor y ondas.

SECCIÓN 2

Ecuación del calor

Difusión y decaimiento de los modos

Ecuación del calor

Modelo y datos

La temperatura $u(x,t)$ en una barra homogénea de longitud L satisface

$$u_t = \kappa u_{xx}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

donde $\kappa > 0$ es la difusividad térmica.
Suponemos que los extremos se mantienen a temperatura cero (el aislamiento correspondería a una condición de flujo nulo):

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad u(x,0) = f(x).$$

La primera pareja son condiciones de frontera; f es la condición inicial.

Ecuación del calor

Separación de variables

Buscamos soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Al sustituir,

$$XT' = \kappa X''T, \qquad \frac{T'}{\kappa T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Obtenemos dos EDO:

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad T' + \kappa\lambda T = 0.$$

Las condiciones de frontera se convierten en $X(0) = X(L) = 0$.

Ecuación del calor

Modos propios

El problema de frontera

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(L) = 0$$

tiene soluciones no triviales solo para

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

El factor temporal correspondiente es

$$T_n(t) = e^{-\kappa\lambda_n t}.$$

Cada modo seno evoluciona de forma independiente y decae exponencialmente.

Ecuación del calor

Superposición y condición inicial

Por linealidad, sumamos los modos y ajustamos f con una serie de senos:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa(n\pi/L)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

La condición inicial se recupera como la serie seno de f; para $t > 0$ los factores exponenciales suavizan y amortiguan los modos.

Ecuación del calor

Ejemplo de un modo puro

Si la temperatura inicial es

$$f(x) = \sin \frac{2\pi x}{L},$$

solo aparece el segundo modo:

$$u(x,t) = e^{-4\kappa\pi^2 t/L^2} \sin \frac{2\pi x}{L}.$$

La frecuencia espacial es el doble que la del primer modo, pero su amplitud decae más deprisa: la tasa de decaimiento es proporcional a n^2.

Ecuación del calor

Ejercicios

1. Resuelve el problema con extremos a temperatura cero y condición inicial $f(x) = \sin(\pi x/L) + 3\sin(3\pi x/L)$.
2. Para $f(x) = x(L - x)$ en $(0, L)$, plantea los coeficientes de Fourier seno y escribe la solución como serie.
3. Describe qué ocurre con cada modo cuando $t \to +\infty$ y compara las tasas de decaimiento del primer y segundo modo.

SECCIÓN 3

Ecuación de ondas

Vibración de una cuerda y modos normales

Ecuación de ondas

Modelo y datos iniciales

El desplazamiento transversal $u(x,t)$ de una cuerda ideal satisface

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

donde $c > 0$ es la velocidad de propagación.
Para extremos fijos y datos iniciales f y g:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Ecuación de ondas

Separación de variables

Con $u(x,t) = X(x)T(t)$,

$$XT'' = c^2 X'' T, \qquad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda.$$

Resultan las ecuaciones

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad T'' + c^2 \lambda T = 0,$$

con $X(0) = X(L) = 0$. Los modos espaciales son los mismos que para la barra de calor.

Ecuación de ondas

Modos normales y solución general

Las frecuencias angulares son

$$\omega_n = c\sqrt{\lambda_n} = \frac{cn\pi}{L}.$$

Por tanto, la solución que satisface los datos iniciales se expresa como

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\omega_n t) + \frac{d_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

donde a_n y d_n son los coeficientes seno de f y g, respectivamente.

Ecuación de ondas

Ejemplo: vibración de un modo

Si la cuerda parte de

$$f(x) = \operatorname{sin} \frac{n\pi x}{L}, \qquad g(x) = 0,$$

la solución es

$$u(x,t) = \operatorname{cos}\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \operatorname{sin} \frac{n\pi x}{L}.$$

A diferencia de la ecuación del calor, la amplitud no decae: el modo oscila periódicamente.

Ecuación de ondas

Ejercicios

1. Resuelve la ecuación de ondas con extremos fijos, desplazamiento inicial $f(x) = \sin(2\pi x/L)$ y velocidad inicial nula.
2. Supón que $f = 0$ y $g(x) = \sin(\pi x/L)$. Escribe la solución y explica el papel del factor $1/\omega_1$.
3. Compara la evolución de un mismo modo en las ecuaciones del calor y de ondas. ¿En cuál se disipa la amplitud?

SECCIÓN 4

Ecuación de Laplace

Problema estacionario en un rectángulo

Ecuación de Laplace

Modelo y condiciones de frontera

La ecuación de Laplace en un rectángulo es

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 < x < L, \quad 0 < y < H.$$

Consideramos las condiciones

$$u(0, y) = u(L, y) = u(x, 0) = 0, \qquad u(x, H) = f(x).$$

A diferencia de calor y ondas, aquí no hay variable temporal: se busca un estado estacionario determinado por los valores en la frontera.

Ecuación de Laplace

Separación de variables

Buscamos $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Al sustituir,

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda,$$

de modo que

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad Y'' - \lambda Y = 0.$$

Las condiciones $u(0,y) = u(L,y) = 0$ fuerzan

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad X_n(x) = \operatorname{sin} \frac{n\pi x}{L}.$$

Ecuación de Laplace

Ajuste del dato en el borde superior

La condición $u(x,0)=0$ selecciona el factor

$$Y_n(y)=\operatorname{sinh}\frac{n\pi y}{L}.$$

Expandimos el dato superior en serie seno,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sin}\frac{n\pi x}{L}, \qquad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sin}\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

La condición en $y=H$ determina la constante de cada modo.

Ecuación de Laplace

Solución por superposición

La solución formal que satisface los cuatro bordes es

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi H/L)} \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Cada modo seno del dato de frontera se prolonga hacia el interior con un factor hiperbólico que depende de y.

Ecuación de Laplace

Ejemplo de un único modo

Si el dato superior es $f(x) = \sin(\pi x/L)$, solo contribuye el primer modo y

$$u(x,y) = \frac{\sinh(\pi y/L)}{\sinh(\pi H/L)} \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Comprueba que u se anula en los otros tres lados y coincide con f en $y = H$.

Separación de variables

Esquema de resolución

1. Especificar dominio, ecuación y datos iniciales o de frontera.
2. Proponer u como producto de funciones de una variable.
3. Separar las EDO y resolver el problema de autovalores espacial.
4. Ajustar los coeficientes con una serie de Fourier adecuada.
5. Interpretar los modos: decaimiento, oscilación o equilibrio.

Mensaje común

Los mismos modos seno aparecen en los tres problemas; la ecuación temporal correspondiente determina cómo evoluciona cada uno.

Cierre

Resumen y alcance

- Fourier descompone datos en modos ortogonales y controla su convergencia bajo hipótesis regulares.
- En calor, cada modo decae exponencialmente.
- En ondas, cada modo oscila con su frecuencia propia.
- En Laplace, los modos se combinan para satisfacer datos de borde.
- La separación de variables transforma la EDP en EDO y un problema de coeficientes de Fourier.

Se ha considerado la ecuación del calor en una barra, una cuerda con extremos fijos y Laplace en un rectángulo; no se estudian aquí otros métodos ni dominios.