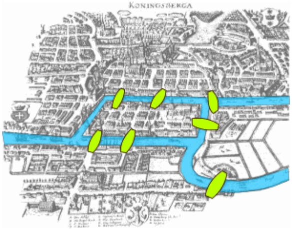
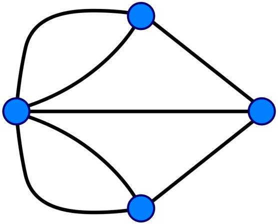
Ampliación de Matemáticas
Teoría de Grafos

José Luis Bravo Trinidad

14 de noviembre de 2016

Grafos:
Isomorfía, conexión y grados





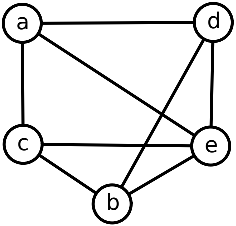
La Teoría de Grafos comenzó en 1735 al resolver Leonard Euler el problema de los puentes de Königsberg.

Los grafos permiten modelizar situaciones en lo que lo único que importa es si los objetos están relacionados.

Tienen multitud de aplicaciones:

- Redes
- Diagramas de flujo
- Bases de Datos
- etc

Definición de grafo



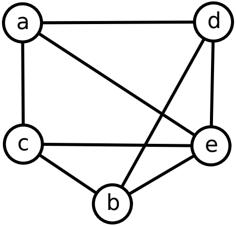
Un **grafo** está formado por:

- Un **conjunto de vértices**, V.
- Un **conjunto de aristas**, E.
- Una aplicación inyectiva γ

$$\gamma\colon E \to (V \times V)^*.$$

$(V \times V)^*$ es el conjunto de pares no ordenados de vértices distintos.

Definición de grafo

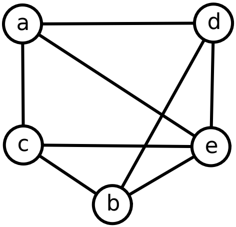


La aplicación inyectiva γ determina para cada arista los vértices que conecta.

Decimos que dos vértices $u, v \in V$ son **adyacentes** si existe $e \in E$ tal que $\gamma(e) = \{u, v\}$.

En el caso anterior, decimos que e es **incidente** con u y v y que u, v son los **extremos** de e.

Definición de grafo



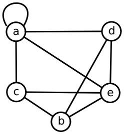
En los grafos se suele omitir γ y cada arista e se nombra como $\gamma(e)$.

En el grafo de la izquierda:

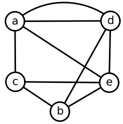
$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$$

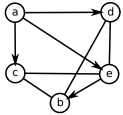
Generalizaciones del concepto de grafo



Si admitimos vértices conectados con ellos mismos: **pseudografo**. En dicho caso se denominan **lazos** a las aristas que conectan un vértice consigo mismo.

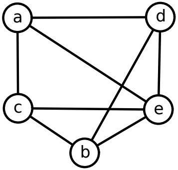


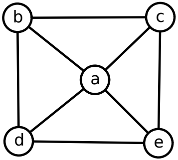
Si la aplicación γ no es inyectiva: **multigrafo**. Se denominan **paralelas** a las aristas que conectan los mismos vértices.



Si los pares de vértices son ordenados: **digrafo** o **grafo dirigido**

Grafos isomorfos





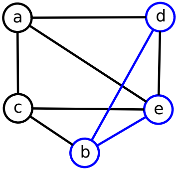
Dos grafos $G = (V, E, \gamma)$ y $G = (V', E', \gamma')$ son **isomorfos** si existen biyecciones

$$f : V \to V', g : E \to E'$$

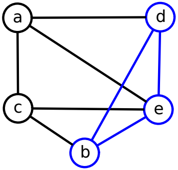
tales que $f(\gamma(a)) = \gamma'(g(a))$".

Dos grafos son isomorfos si *renombrando los vértices y aristas* del primero, obtenemos el segundo

Subgrafos

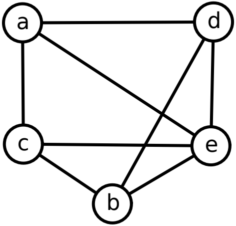


Denominamos **subgrafo** de un grafo a un grafo obtenido tomando un subconjunto de vértices y un subconjunto de aristas y todos los extremos de estas.



Denominamos **subgrafo completo** de un grafo a un grafo obtenido tomando un subconjunto de vértices y todas las aristas cuyos extremos sean esos vértices.

Representación con listas



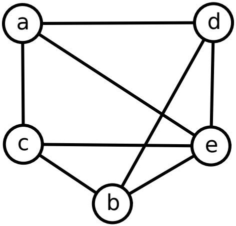
Lista de incidencia: Se enumeran las aristas

$$\{\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{b,c\},\{b,d\},\{b,e\},\{c,e\},\{d,e\}\}$$

Lista de adyacencia: Se enumeran los vértices adyacentes:

$$\{\{a \to c,d,e\},\{b \to c,d,e\},\{c \to a,b,e\},\{d \to a,b,e\}\{e \to a,b,c,d\}\}$$

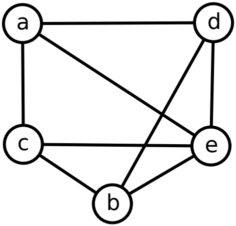
Representación con matrices



Matriz de incidencia: Se representan las aristas. -1 del vértice que sale y 1 al vértice que llega.

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Representación con matrices



Matriz de adyacencia: En la posición (i, j) hay un 1 si las aristas i, j son adyacentes.

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Isomorfía a partir de la matriz de adyacencia

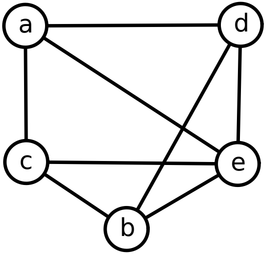
Sean $M_G, M_{G'}$ matrices de adyacencia de los grafos G y G'.

Teorema

Los grafos G y G' son isomorfos si y solo si existe una matriz de permutaciones P tal que $PM_G = M_{G'}P$.

$$M_G = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_{G'} = \begin{array}{c} \\ a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a' & b' & c' & d' & e' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Grado de un vértice



Denominamos **grado** de un vértice al número de aristas que lo tienen como extremo.

En el grafo de la figura:

$$\mathrm{gr}(a) = 3, \ \mathrm{gr}(e) = 4$$

Se denomina **secuencia de grados** de un grafo a la lista (decreciente) de los grados del grafo.

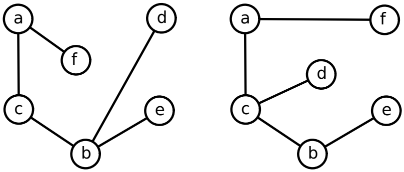
$$(4, 3, 3, 3, 3)$$

Secuencia de grados

Proposición

Si dos grafos son isomorfos, entonces tienen la misma secuencia de grados.

Dos grafos pueden tener la misma secuencia de grados y no ser isomorfos.



Suma de los grados

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo y $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{gr}(v_i) = 2\#E.$$

Teorema (Havel-Hakimi)

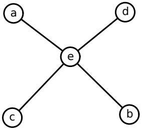
Una secuencia de enteros $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k \geq 0$ es la secuencia de grados de un grafo si y sólo si la secuencia que resulta de eliminar el primer elemento y restar 1 a n_1 enteros restantes es la secuencia de grados de un grafo.
En particular la suma ha de ser par y $n_1 < k$.

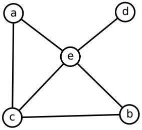
Algoritmo de Havel-Hakimi

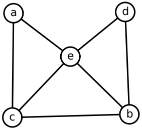
Para determinar si una secuencia de enteros es la secuencia de grados de un grafo:

- Tenemos una secuencia $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k \geq 0$
- Si todos los elementos son cero, terminamos con respuesta afirmativa.
- Eliminamos n_1 de la secuencia y restamos 1 a (los primeros) n_1 elementos.
- Si algún entero toma valor negativo, terminamos con respuesta negativa.
- Reordenamos la secuencia de mayor a menor.
- Volvemos al primer paso.

Algoritmo de Havel-Hakimi







Tomemos $(4,3,3,2,2)$. Asignamos a cada grado un nombre de vértice:

$$(\overset{e}{4}, \overset{c}{3}, \overset{b}{3}, \overset{d}{2}, \overset{a}{2})$$

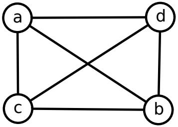
Unimos el vértice eliminado con los vértices a los que restamos.

$$(\overset{c}{2}, \overset{b}{2}, \overset{a}{1}, \overset{d}{1})$$

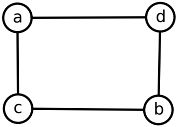
Repetimos el proceso: $(\overset{b}{1}, \overset{d}{1}, \overset{a}{0})$

Repetimos y terminamos: $(\overset{d}{0}, \overset{a}{0})$

Grafos regulares y completos



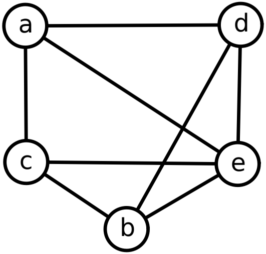
Denominamos **grafo completo** a un grafo tal que todos los pares de vértices están conectados. Denotamos K_n al grafo completo de n vértices.



Denominamos **grafo k-regular** a todo grafo tal que todos sus vértices tienen grado k.

Todo grafo completo es $n-1$ regular.

Cliques y conjuntos independientes



Un **clique** es un subgrafo isomorfo a un grafo completo.

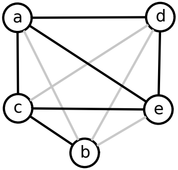
Un **conjunto independiente** de un grafo es subgrafo completo sin aristas.

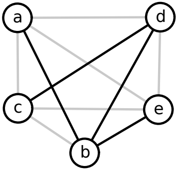
En el grafo de la figura:

$\{b, d, e\}$ es un clique.

$\{c, d\}$ es un conjunto independiente.

Complemento





Denominamos **complemento** o **inverso** de un grafo G a un grafo con el mismo conjunto de vértices tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si no lo son en G.

Un grafo G contiene un clique de k-vértices si y sólo si su complemento contiene un conjunto independiente de k-vértices.

Caminos en un grafo

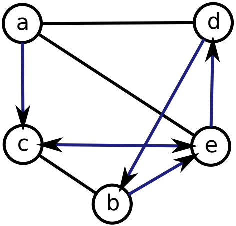
Inducción

Supongamos que queremos demostrar que un enunciado P_n dependiente de un parámetro $n \in \mathbb{N}$ es cierto (e.g. "si $P_n = 2P_{n-1}$ y $P_0 = 1$, entonces $P_n = 2^n$").

El enunciado es cierto (por inducción sobre n) para todo $n \in \mathbb{N}$ si

- P_1 es cierto.
- Asumiendo que P_i es cierto para $i < n$, demostramos que es cierto P_n

Camino, circuito y ciclo



acedbec
Camino de longitud 6

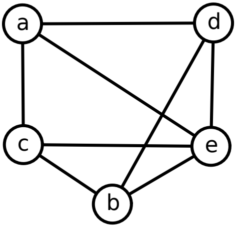
Camino: Sucesión finita de vértices de modo que cada dos consecutivos son adyacentes.

El número de aristas dentro de un camino es su **longitud**.

Se denominan **extremos** del camino al primer y último vértice.

Dos vértices u, v están **conectados** si son los extremos de algún camino.

Camino, circuito y ciclo



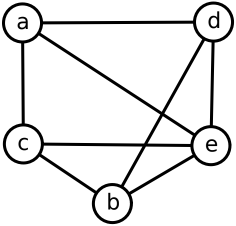
Un camino es **cerrado** cuando los extremos coinciden.

Un camino es **simple** cuando no se repite ningún vértice.

Un **ciclo** es un camino cerrado en el que no se repite ningún otro vértice.

Un **circuito** es un camino cerrado en el que no se repite ninguna arista.

Camino, circuito y ciclo



- Camino cerrado: *acbeca*
- Camino simple: *acbde*
- Ciclo: *acbea*
- Circuito: *edaebce*

Teorema

Si en un grafo G existe un camino que conecta dos vértices distintos, entonces existe un camino simple que conecta los mismos vértices.

Demostración.

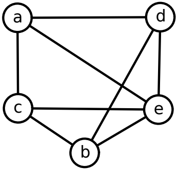
Supongamos que u, v están conectados por $u = w_0 w_1 w_2 \ldots w_n = v$. Si no es simple $w_i = w_j$, para algún $i < j$. Entonces el camino

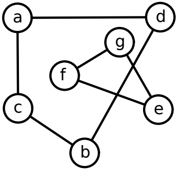
$$w_0 w_1 \ldots w_{i-1} w_i = w_j w_{j+1} \ldots w_n$$

tiene un vértice repetido menos. Repitiendo el proceso obtenemos un camino simple.

□

Grafo conexo y componentes conexas





Decimos que un grafo es **conexo** si todo par de vértices están conectados.

Si un grafo no es conexo se dice **disconexo**.

Se denomina **componente conexa** a todo subgrafo conexo G' tal que no haya otro subgrafo conexo G'' tal que G' sea subgrafo de G''.

Conexión a partir de la matriz de adyacencia

Teorema

Sea G un grafo y M_G su matriz de adyacencia. La posición (i,j) de la matriz M_G^k es el número de caminos de longitud k que comienzan en el vértice i y terminan en el j.

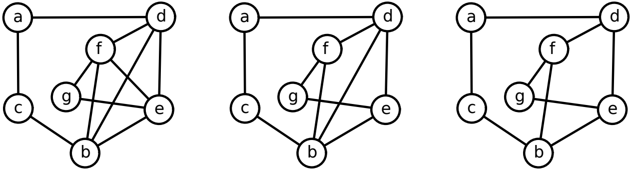
Definimos la **matriz de conexión** como

$$M_C = M_G + M_G^2 + \ldots + M_G^{n-1}$$

donde n es el número de vértices.

Entonces el grafo es conexo sí y sólo si M_C no tiene ceros.

Grafo euleriano



Un grafo es **euleriano** cuando existe un circuito que recorre todas las aristas.

Un camino es **euleriano** cuando recorre todas las aristas sin repetir ninguna.

Teorema

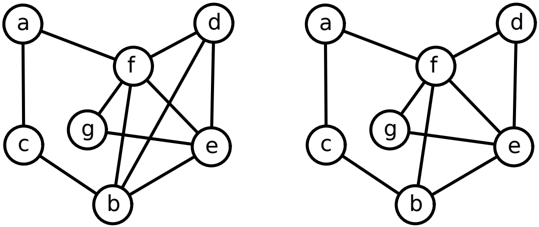
Un grafo conexo es euleriano si y solo si todo vértice tiene grado par.

Algoritmo de Hierholzer.

1. Partimos de un vértice v_0 cualquiera. Tomamos $v = v_0$.
2. Elegimos un vértice u adyacente a v y eliminamos la arista $\{u, v\}$. Tomamos $v = u$.
3. Repetimos el paso 2 hasta volver a v_0. Esto nos genera un circuito C.
4. Si no quedan aristas, hemos terminado. Si quedan aristas tomamos v un vértice de C de grado positivo.
5. Repetimos 2 y 3 y obtenemos un nuevo circuito C_1. Unimos C_1 a C.
6. Si no quedan aristas hemos terminado. En caso contrario, vamos a 4.

□

Grafos hamiltonianos



Un grafo es **hamiltoniano** cuando existe un ciclo que recorre todos los vértices.

Teorema (Ore 1960)

Sea G un grafo con $n \geq 3$ vértices. Si para cada par de vértices no adyacentes se verifica que $gr(v) + gr(w) \geq n$, entonces G es hamiltoniano.

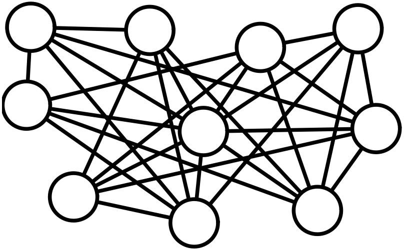
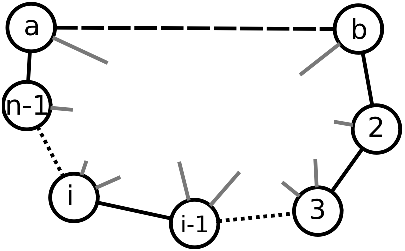
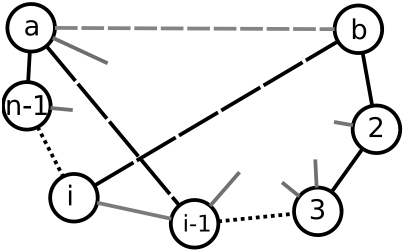


Figura: El grafo es hamiltoniano por el Teorema de Ore



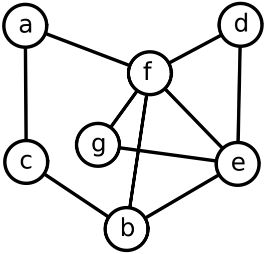


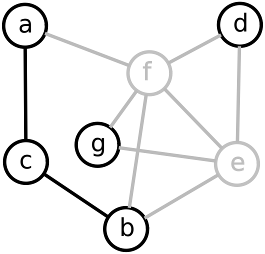
Por contradicción. Tomemos el grafo con mayor número de aristas que no cumpla el Teorema. Al añadir una arista debe ser hamiltoniano.

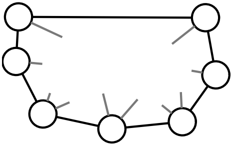
Como $\mathrm{gr}(a) + \mathrm{gr}(b) > n$, existe i tal que $a, i-1$ y b, i son adyacentes. Entonces es hamiltoniano. Por contradicción concluimos.

Teorema

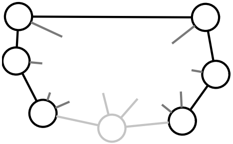
Sea $G = (V, E)$ tal que $\#V \geq 3$. Si G es hamiltoniano, entonces para cada subconjunto $U \subset V$, el subgrafo completo de G de vértices $V \backslash U$ tiene a lo sumo $\#U$ componentes.



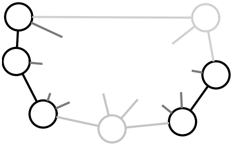




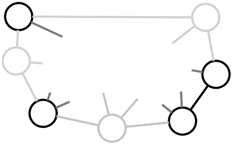
Ciclo hamiltoniano



Eliminamos 1 vértice.

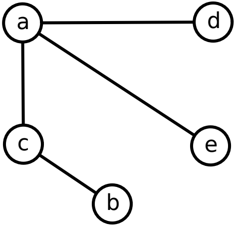


Eliminamos 2 vértices.



Eliminamos 3 vértices.

Árboles y grafos dirigidos



Decimos que un grafo es un **árbol** si es conexo y no tiene ciclos.

Si un grafo no es conexo ni tiene ciclos decimos que es un **bosque**.

Teorema

Un grafo T es un árbol si y solo si cada dos vértices distintos de T se conectan por un único camino simple.

Teorema

Un grafo conexo de n vértices es un árbol si y sólo si tiene $n-1$ aristas.

Demostración.

Probaremos que si T es un árbol, entonces tiene $n-1$ aristas.
Por inducción sobre el número de aristas.
Si T tiene 0 aristas, entonces para ser conexo ha de ser un único vértice y se cumple el resultado.
Supongamos que se cumple para árboles de menos de n aristas y veamos que es cierto para un árbol T de n aristas.
Si eliminamos una arista en un árbol, entonces pasa a tener dos componentes conexas, T_1, T_2, sin ciclos, luego dos árboles.
Sea n_1 el número de aristas de T_1, y n_2 el de T_2. $n_1, n_2 < n$ y $n_1 + n_2 = n - 1$.
Por inducción T_1 tiene $n_1 + 1$ aristas y T_2 tiene $n_2 + 1$ aristas. Entonces T tiene $n_1 + 1 + n_2 + 1 = n + 1$ aristas.

Árboles

Decimos que un vértice v es **terminal** si $\mathrm{gr}(v) = 1$.

Teorema

Un árbol de $n \geq 2$ vértices tiene al menos dos vértices terminales.

Demostración.

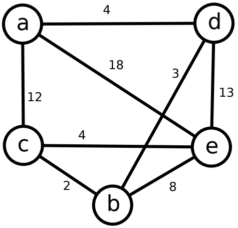
Supongamos que no es cierto (tenemos 1 o 0 vértices terminales).
Si tenemos un único vértice terminal, entonces tenemos la contradicción.

$$2(n-1) = 2\#E = \sum_v \mathrm{gr}(v) \geq 1 + 2(n-1)$$

Si no tenemos vértices terminales, entonces tenemos la contradicción.

$$2(n-1) = 2\#E = \sum_v \mathrm{gr}(v) \geq 2n.$$

Grafo etiquetado



Se denomina **grafo etiquetado** a un grafo $G = (V, E)$ con una función $d\colon E \to \mathbb{R}$.

Denominamos **etiqueta** o **distancia** de $\{u, v\} \in E$ al valor $d(\{u, v\})$.

Si $\{u, v\} \notin E$, podemos considerar $d(u, v) = +\infty$.

Definimos **longitud** de un camino como la suma de las etiquetas de las aristas.

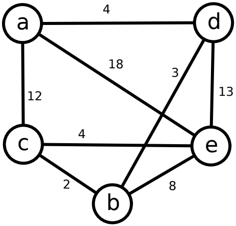
Algoritmo de Dijkstra

Sea $G = (V, E)$ un grafo etiquetado por una función d positiva en toda arista. Sean $x, y \in V$.

Teorema (Algoritmo de Dijkstra)

El camino de longitud mínima entre x e y se puede obtener por el siguiente procedimiento:

1. *Generamos $T = V$ y $L(x) = 0$, $L(v) = +\infty$ para todo $v \in V$.*
2. *Calculamos $v \in T$ tal que $L(v) = \min\{L(w) \colon w \in T\}$.*
3. *Si $v = y$, entonces hemos terminado y la distancia es $L(y)$.*
4. *En caso contrario, hacemos $T \to T \setminus \{v\}$,*
   $L(w) \to \min\{L(w), L(v) + d(v, w)\}$ y volvemos a 2.



Distancia mínima de a a e.

$T = (a, b, c, d, e)$

$L = (0, \infty, \infty, \infty, \infty)$

Tomamos $v = a$:

$T = (b, c, d, e)$

$L = (\infty, 12, 4, 18)$

Tomamos $v = d$:

$T = (b, c, e)$, $L = (7, 12, 17)$

Tomamos $v = b$:

$T = (c, e)$, $L = (9, 16)$

Tomamos $v = c$:

$T = (e)$, $L = (13)$

La distancia es 13.

Corrección del algoritmo de Dijkstra

Vamos a probar que si v es el vértice elegido en el paso 2, entonces $L(v)$ es la menor distancia de v a x.

Denotaremos $T^{(k)}$ el conjunto T en el paso k.

Denotaremos $D(x, v)$ a la distancia del vértice v al origen, que es la menor de las longitudes de los caminos que conectan v con el origen.

Como para calcular $L(v)$ sumamos distancias a lo largo de un camino, siempre $L(v) \geq D(x, v)$.

Por inducción sobre el número de pasos.

Paso 0.

En el paso 0, $L(x) = 0$ y es la mínima pues todos los pesos son positivos.

Si se verifica para el paso n, también para el $n+1$.

Sea v el vértice añadido en el paso $n+1$ ($T^{(n)} = T^{(n+1)} + \{v\}$).

Sea $x = w_0 w_1 \dots w_k = v$ el camino que da la distancia mínima al origen.

Nótese que la longitud de $w_0 w_1 \dots w_j$, $j < k$ es la distancia de w_j al origen, pues en otro caso, tendríamos un camino más corto de x a v.

Sea w_i el primer vértice del camino en $T^{(n)}$. En particular $D(x, w_i)$ es la longitud del camino $w_0 w_1 \dots w_i$.

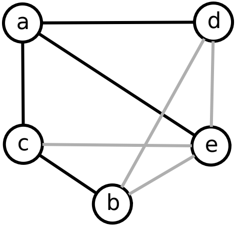
Como w_{i-1} ya ha sido visitado, $L(w_{i-1})$ es la distancia de w_{i-1} al origen. Es más, $L(w_i) \leq L(w_{i-1}) + d(w_{i-1}, w_i)$.

Por otra parte, por elección de v,

$$L(v) \leq L(w_i) \leq L(w_{i-1}) + d(w_{i-1}, w_i) = D(x, w_i) \leq D(x, w_k).$$

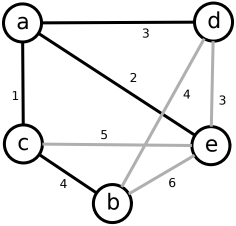
Como teníamos $L(v) \geq D(x, w_k)$, entonces $L(v) = D(x, w_k)$.

Árbol recubridor



Dado un grafo conexo G, se denomina **árbol recubridor** o **generador** de G a cualquier árbol que sea subgrafo de G y contenga todos los vértices.

Árbol recubridor minimal



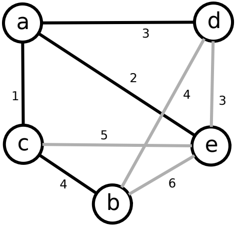
Dado un grafo etiquetado, se denomina **Árbol recubridor minimal** a cualquier árbol recubridor tal que la suma de los pesos de las aristas sea menor o igual a la de cualquier otro árbol recubridor.

Algoritmo de Kruskal

Partimos de un grafo conexo y etiquetado G.

1. Se considera un bosque B, formado en un principio por el conjunto de todos los vértices y ninguna arista.
2. Se toma la arista del grafo de menor peso.
3. Si la arista conecta dos árboles distintos del bosque B, se añade al bosque y se elimina de G.
4. Si la arista no conecta dos árboles distintos, se elimina de G.
5. Si queda alguna arista en G, se vuelve a 2

Algoritmo de Kruskal



En B sólo indicaremos las aristas en cada paso.

$B = \{\}$

$B = \{\{a, c\}\}$

$B = \{\{a, c\}, \{a, e\}\}$

$B = \{\{a, c\}, \{a, e\}, \{a, d\}\}$

Descartamos $\{d, e\}$

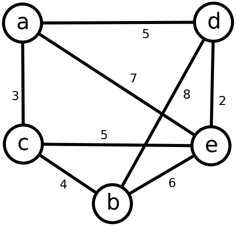
$B = \{\{a, c\}, \{a, e\}, \{a, d\}, \{c, b\}\}$

Algoritmo de Prim

Partimos de un grafo conexo $G = (V, E)$.

1. Definimos un grafo T formado incialmente por uno de los vértices.
2. De todos los vértices adyacentes a T que no estén en T, añadimos aquel cuya distancia sea mínima y la arista que lo conecta con T de dicha distancia.
3. Repetimos el paso anterior hasta agotar todos los vértices.

Algoritmo de Prim



En T indicaremos las aristas en cada paso.
Partimos del vértice a como único vértice de T.

$T = \{\{a, c\}\}$
$T = \{\{a, c\}, \{c, b\}\}$
$T = \{\{a, c\}, \{c, b\}\}$
$T = \{\{a, c\}, \{c, b\}, \{a, d\}\}$
$T = \{\{a, c\}, \{c, b\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}$

Definición

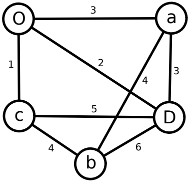
Dado un grafo etiquetado G, un **flujo entre dos véritices**, el origen O y el destivo D, es un subgrafo dirigido etiquetado F tal que:

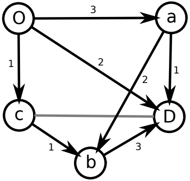
1. O, D son vértices de F.
2. Los pesos de las aristas de F son menores o iguales que los de G.
3. Para todo vértice v de F distinto de O, D la suma de los pesos de las aristas que salen es igual al de las aristas que entran.

Se define la **cantidad total de flujo** como la suma de los pesos de las aristas que salen de O menos la suma de los pesos de las aristas que llegan.

El **problema del flujo máximo** trata de obtener un flujo tal que la cantidad total de flujo sea máxima.

Ejemplo flujo





$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & O & a & b & c & D \\
\hline
O & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\
a & -3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
b & 0 & -2 & 0 & -1 & 3 \\
c & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
D & -2 & -1 & -3 & 0 & 0
\end{array}
$$

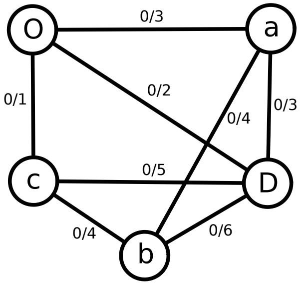
Matriz del flujo

Algoritmo de Ford-Fulkenson

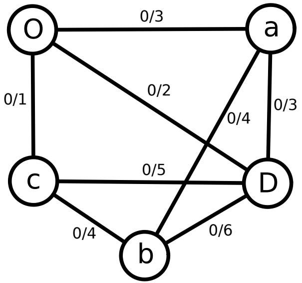
La **capacidad residual** de dos nodos $c(u,v)$ es la diferencia entre el peso de la arista $\{u,v\}$ de G y el flujo $f(u,v)$.
Una **trayectoria de aumento** como un camino simple de O a D tal que para cada dos vértices u,v del camino, tenemos $c(u,v)>0$.

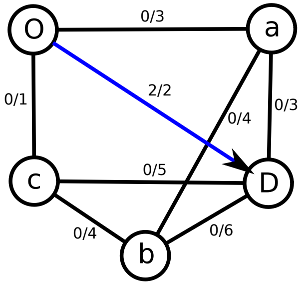
1. Comenzamos con un flujo F tal que $F(u,v)=0$ para todo par de vértices u,v.
2. Buscamos una trayectoria de aumento. Sea $c_t>0$ el mínimo de $c(u,v)$ donde (u,v) recorre las aristas de la trayectoria.
3. Para cada par de vértices (u,v) de la trayectoria, hacemos $F(u,v)=F(u,v)+c_t$ y $F(v,u)=F(v,u)-c_t$.
4. Volvemos a 2 hasta que no encontremos más trayectorias de aumento.

Algoritmo de Ford-Fulkenson

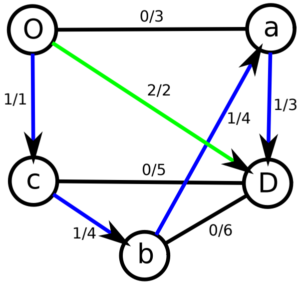


Algoritmo de Ford-Fulkenson

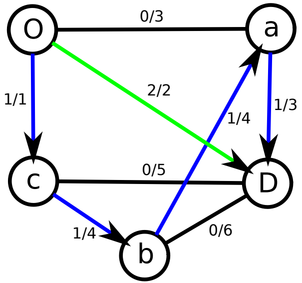


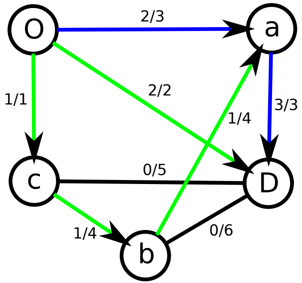


Algoritmo de Ford-Fulkenson

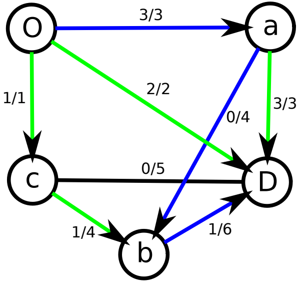


Algoritmo de Ford-Fulkenson

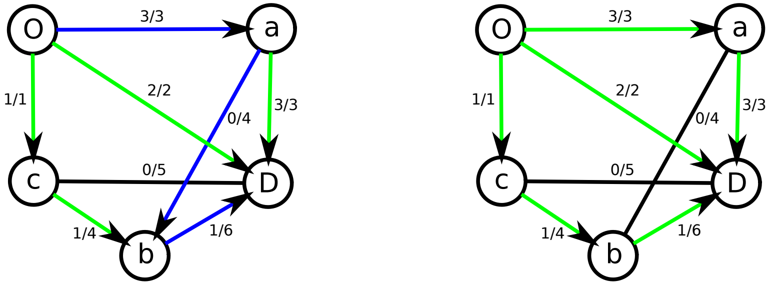




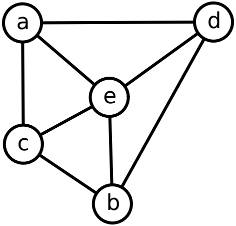
Algoritmo de Ford-Fulkenson



Algoritmo de Ford-Fulkenson



Mapas y coloraciones

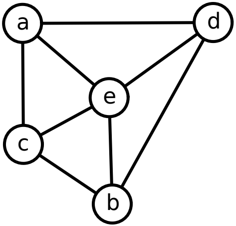


Un grafo es **plano** si admite una representación gráfica en el plano de modo que no se corten las aristas.

Dicha representación gráfica se denomina **mapa**.

Dado un mapa, se denomina **región** a un camino cerrado tal que en su "interior" no hay ni vértices ni aristas.

Se denomina **grado de una región** a la longitud del camino que la rodea.



Teorema

Sea G un grafo plano y R el conjunto de regiones de un mapa asociado. Entonces

$$\sum_{r \in R} gr(r_i) = 2\#E.$$

Teorema (Fórmula de Euler)

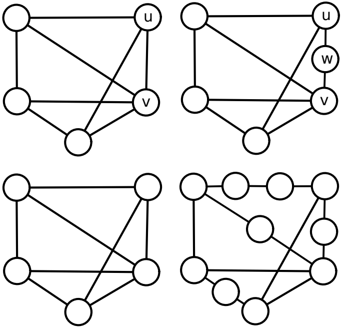
Sea M un mapa conexo, que representa al grafo $G = (V, E)$. Entonces

$$\#V - \#E + \#R = 2.$$

Como consecuencia, podemos determinar si un grafo no es plano:

- Si es conexo y $\#E > 3\#V - 6$.
- Si es conexo, no contiene un clique de tres vértices y $\#E > 2\#V - 4$.

Subdivisión elemental

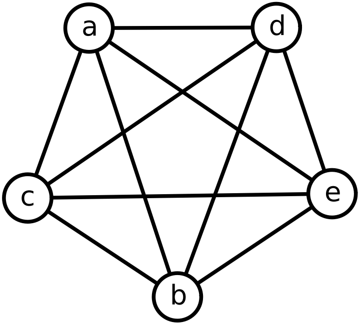


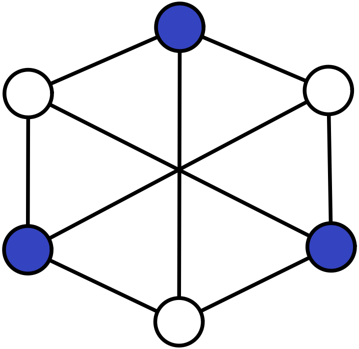
Una **subdivisión elemental** de un grafo G a partir de una arista $\{u, v\}$ es un nuevo grafo en el que la arista $\{u, v\}$ se susitituye por dos aristas $\{u, w\}, \{w, v\}$, donde w es un nuevo vértice.

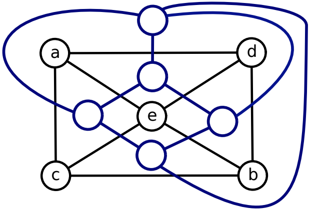
Una **subdivisión** de un grafo G es un grafo resultante de hacer un número finito de subdivisiones elementales a G (puede ser 0).

Teorema (Teorema de Kuratowsky)

Un grafo G es plano si y solo si no contiene ningún subgrafo que sea isomorfo a una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$.

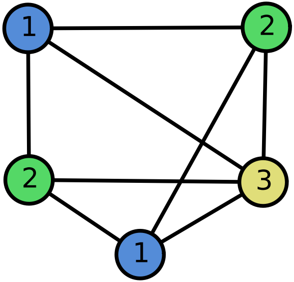






Dos regiones son **adyacentes** si tienen una arista en común.
El **pseudomultigrafo dual** G_M de un mapa M es el pseudomultigrafo (plano) construido del siguiente modo:

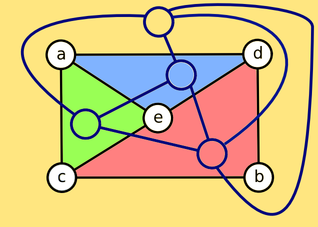
1. Los vértices de G_M son las regiones de M.
2. Para cada arista $e \in E$, definimos una arista de G_M que conecta las dos regiones adyacentes a e.



Una **coloración** de G con k colores es una aplicación $\gamma\colon V \to C$ de modo que si $u, v \in V$ son vértices adyacentes, entonces $\gamma(u) \neq \gamma(v)$.

Una **coloración de las regiones** de un mapa es una aplicación $\gamma\colon R \to C$ de modo que si $r, s \in R$ son regiones adyacentes, entonces $\gamma(r) \neq \gamma(s)$.

Teorema de los cuatro colores



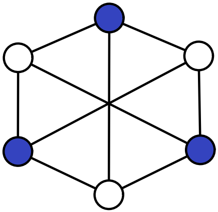
Teorema (K. Appel, W. Haken, J. Koch)

Todo grafo plano admite una coloración con a lo sumo cuatro colores.

Corolario

Todo mapa admite una coloración de las regiones con a lo sumo cuatro colores de modo que dos regiones adyacentes tengan distinto color.

Grafos bipartitos



Un grafo se dice que es **bipartito** si admite una coloración con dos colores.

Un grafo se dice **bipartito completo** si es bipartito y todo vértice del primer color es adyacente a todo vértice del segundo color.

Los denotaremos K_{n_1,n_2} (siendo n_1, n_2 el número de vértices de cada color).

Teorema

Un grafo es bipartito si y solo si no tiene ciclos con longitud impar.

Denominamos **número cromático** de un grafo G al menor número de colores que son necesarios para colorearlo.

Dado un grafo G y $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos $p(G,n)$ al número de coloraciones distintas con n colores que admite el grafo G. $p(G,x)$ es un polinomio y se denomina **polinomio cromático**.

Teorema

Sea G un grafo y u, v dos vértices adyacentes. Sea e el lado que los une. Entonces

$$p(G_e, n) = p(G, n) + p(G'_e, n),$$

donde G_e es el subgrafo de G obtenido al eliminar e de G y G'_e es el grafo obtenido al identificar en G_e los vértices u y v.