Ejercicios Tema 1

1. En una primera medición, se estimó que la altura del Everest era de 8839 msnm. Mediciones posteriores han obtenido que la altura exacta es 8843 msm. ¿Cuál es el error relativo y absoluto de esa primera medición? ¿Cuántas cifras significativas tenía la medida?

2. Un voltímetro ofrece un error relativo del 2 %. Si hemos obtenido 5.82 V, ¿es posible que el voltaje real sea de 6V? Si el voltaje real es de 5.818V, ¿cuántas cifras significativas tenía la primera medida?

3. Se ha obtenido que un ángulo mide 1.2 radianes, con un error relativo del 2 %. ¿Con qué error relativo tenemos el seno de dicho ángulo (en %, redondeado a unidades)?

4. Aplicar 3 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $3x^3 - 2x^2 - 0.1$ en el intervalo $[0, 1]$.

5. Aplicar 4 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $\sin(x)$ en el intervalo $[3, 3.5]$.

6. Aplicar 4 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $\cos(x)$ en el intervalo $[-2, -1.5]$.

7. Aplicar 2 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $x^2 - 3x + 2$ en el intervalo $[0, 3]$.

8. Aplicar 2 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $x^2 - 2x + 1$ en el intervalo $[0, 2]$.

9. Aplicar 3 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $2 - x - e^x$ en el intervalo $[0, 1]$. Acotar el error cometido.

10. Aplicar 4 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $e^x + 3x$ en el intervalo $[0, 1]$. Acotar el error cometido.

11. La ecuación $e^x - 3x = 0$ tiene por solución $x = 0.61906129$. Comenzando con el intervalo $[0, 1]$, realizar seis iteraciones por el método de bisección para encontrar la raíz aproximada. ¿Cuántas cifras significativas tiene dicha aproximación? ¿Cuántas iteraciones son necesarias para que la raíz obtenida tenga un error menor que 10^{-4}.

12. Probar que la ecuación $e^x + 2x = 0$ tiene una única raíz. Acotar dicha raíz mediante el método de la bisección con un error menor de 10^{-2}.

13. Probar que la función $f(x) = \cos x - 2x$ tiene un único cero. Acotarlo mediante el método de la bisección con un error menor de 10^{-2}.

14. Utilizar el método de la bisección para encontrar una solución aproximada con un error menor que 10^{-2} en el intervalo $[4, 4.5]$ para la ecuación $x = \tan(x)$.

15. Sabiendo que existe una raíz de la ecuación $x^3 + x = 6$ entre 1.55 y 1.75, ¿cuántas iteraciones son necesarias hasta obtener mediante el método de bisección un intervalo de amplitud menor o igual que 10^{-3} que contenga la raíz? Calcular todas las iteraciones necesarias.

16. Aplicar el Método de bisección a $f(x) = x^3 - 16 = 0$, a fin de determinar la raíz cúbica de 16 con un error menor que 0.125.

17. Aplicar el Método de bisección a $f(x) = x^3 - 6 = 0$, a fin de determinar la raíz cúbica de 6 con un error menor que 0.125.

18. Aplicar el método de la bisección para obtener una solución de la ecuación $\cos x - \sin 2x = x$ (entre 0 y 1) con un error menor de 10^{-2}. ¿Cuántos pasos serían necesarios para que el error fuese menor que 10^{-5}?

19. Aplicar el método de la bisección para obtener una solución de la ecuación $xe^x = 2$ con dos cifras significativas.

20. Aplicar cinco pasos del Método de Newton-Raphson para encontrar un cero de $f(x) = x - e^{-x}$ partiendo de $x_0 = 1$.

21. Aplicar tres pasos del Método de Newton-Raphson para encontrar una solución de $x = 3\sin(x)$ partiendo de $x_0 = 1$.

22. Aplicar cuatro pasos del Método de Newton-Raphson para encontrar una raíz cúbica de 50 partiendo de $x_0 = 4$.

23. Una aplicación de los métodos de cálculo de raíces es obtener los máximos y mínimos de una función, pues se corresponden con los ceros de la derivada. Calcular mediante 4 iteraciones del método de Newton-Raphson partiendo de $x_0 = -0.5$ la posición del mínimo de $f(x) = e^x + x^2/2$.

24. Aplicar el Método de Newton-Raphson para calcular un cero de la función coseno partiendo de $x_0 = 1.5$, con un error menor que 10^-3.

25. Aplicar cuatro pasos del método de Newton-Raphson para calcular aproximadamente la raíz de $x^2 - 3x + 2$, partiendo de:
    - $x_0 = 0$
    - $x_0 = 1.5$
    - $x_0 = 3$.

26. Aplicar tres pasos del Método de la secante para encontrar un cero de $f(x) = x - e^{-x}$ partiendo de $x_0 = 1$ y $x_1 = 0$.

27. Aplicar tres pasos del Método de la secante para encontrar una solución de $x = \sin(x)$ partiendo de $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$

28. Aplicar tres pasos del método del punto fijo para calcular un punto fijo de $F(x) = -\sin(x) + x + 1/2$ partiendo de $x0 = 0.4$.

29. Estudiar si el método del punto fijo para la función $F(x) = -\sin(x) + x + 1/2$ converge para condiciones iniciales en el intervalo $[0, 1]$.

30. Calcular el error cometido al aplicar tres pasos del método del punto fijo para calcular un punto fijo de $F(x) = -\sin(x)+x+1/2$ partiendo de $x_0 = 0.5$. Comprobar las condiciones en el intervalo $[0, 1]$.

31. Resolver mediante eliminación gaussiana con pivote los sistemas

$$a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \quad c)\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

32. Resolver los siguientes sistemas lineales utilizando eliminación gaussiana con y sin pivote:

$$a)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 100x_3 = 1 \\ x_1 - 10x_2 + 0.00001x_3 = 0 \\ 3x_1 - 100x_2 + 0.0001x_3 = 0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x_1 + 20x_2 - x_3 + 0.001x_4 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 20x_3 - 0.1x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 100x_3 - 10x_4 = 1 \\ 2x_2 - 100x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

33. Aplicar tres pasos del método de Jacobi a los sistemas

$$a)\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

34. Aplicar tres pasos del método de Gauss-Seidel a los sistemas

$$a)\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

35. Calcular un cero del sistema

$$\begin{aligned} \exp(xy) - 6xy &= 0, \\ -\exp(y) + 6x &= 0, \end{aligned}$$

mediante tres pasos del método de Newton, comenzando en $(1, 1)$.

36. Calcular un cero del sistema

$$\begin{aligned} \sin(x) - y^2/\pi &= 0, \\ \sin(xy) &= 0, \end{aligned}$$

mediante tres pasos del método de Newton, comenzando en $(2.5, 1)$.

37. Obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas:

a)

x	-1	0	1
y	0	3	0

b)

x	0	1	2
y	-2	0	2

c)

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

38. Utilizando los polinomios de Lagrange, obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas:

a)

x	-1	0	1
y	0	3	0

b)

x	0	1	2
y	-2	0	2

c)

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

39. Obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas mediante el método de Newton:

a)

x	-1	0	1
y	0	3	0

b)

x	0	1	2
y	-2	0	2

c)

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

40. Obtener los splines cúbicos naturales que interpolan las siguientes tablas:

a)

x	-1	0	1
y	0	3	0

b)

x	0	1	2
y	-2	0	2

c)

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

41. Calcular mediante el método del trapecio simple una aproximación de las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (1+x^3)^{1/2}\,dx$ *c*) $\int_0^2 (1+x^3)^{-1/2}\,dx$ *e*) $\int_0^1 xe^x\,dx$

b) $\int_1^2 (1+x^4)^{-1}\,dx$ *d*) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$ *f*) $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

42. Calcular mediante el método de Simpson una aproximación de las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (1+x^3)^{1/2}\,dx$ *c*) $\int_0^2 (1+x^3)^{-1/2}\,dx$ *e*) $\int_0^1 xe^x\,dx$

b) $\int_1^2 (1+x^4)^{-1}\,dx$ *d*) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$ *f*) $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

43. Calcular mediante el método del trapecio compuesto con tres intervalos una aproximación de las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (1+x^3)^{1/2}\,dx$ *c*) $\int_0^2 (1+x^3)^{-1/2}\,dx$ *e*) $\int_0^1 xe^x\,dx$

b) $\int_1^2 (1+x^4)^{-1}\,dx$ *d*) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$ *f*) $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

Problemas Tema 1

1. Al medir los lados de un rectángulo se han obtenido 130 y 320, con un error relativo máximo del 3 %. Si calculamos con estos datos el área y el perímetro, ¿qué error relativo máximo tendrán (en %, redondeado a unidades)?

2. Una aplicación de los métodos de cálculo de raíces es obtener los máximos y mínimos de una función, pues se corresponden con los ceros de la derivada. Acotar mediante el método de bisección la posición del mínimo de $f(x) = e^{(x-1)x^4}$ con un error menor que 10^{-2}. ¿Cuál sería el error cometido en el valor de dicho máximo?

3. Aplicar el método de Newton-Raphson para calcular los dos ceros y el mínimo positivos de $f(x) = e^x - 3x$ con un error menor de 10^{-2}. Probar que no hay más ceros ni raíces.

4. Encontrar una solución de $e^x - 4x - \sin(x) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$ mediante el método del punto fijo. Probar al menos tres transformaciones de la ecuación y estudiar la convergencia del método.

5. Supongamos que las ecuaciones del movimiento de un proyectil son

$$y = f(t) = 4605(1 - e^{-t/15}) - 147t, \quad x = r(t) = 22400(1 - e^{-t/15}).$$

   a) Determine el tiempo transcurrido hasta el impacto con 10 cifras de precisión.
   b) Determine el alcance del disparo con diez cifras decimales de precisión.

6. Halle el punto de la parábola $y = x^2$ que está más cerca del punto $(3, 1)$ con diez cifras decimales de precisión.

7. Halle el punto de la curva $y = \text{sen}(x - \text{sen}(x))$ que está más cerca del punto $(2.1, 0.5)$ con diez cifras decimales de precisión.

8. Halle con diez cifras decimales de precisión, el valor de x para el que es mínima la distancia vertical entre las gráficas de las funcioens $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = x/5 - \text{sen}(x)$.

9. Se construye una caja sin tapadera a partir de una hoja metálica rectangular que mide 10 por 16 centímetros. ¿Cuál debe ser el lado de los cuadrados que hay que recortar en cada esquina para que elvolumen de la caja sea 100 centímetros cúbicos? (con precisión 10^-9).

10. La curva formada por un cable colgante se llama catenaria. Supongamos que el punto más bajo de una catenaria es el origen $(0, 0)$, entonces la ecuación de la catenaria es $y = C\cosh(x/C) - C$. Si queremos determinar la catenaria que pasa por los puntos $(\pm a, b)$, entonces debemos resolver la ecuación $b = C\cosh(a/C) - C$, donde la incógnita es C.

    a) Pruebe que la catenaria que pasa por los puntos $(\pm 10, 6)$ es

$$y = 9.1889\cosh(x/9.1889) - 9.1889.$$

    b) Halle la catenaria que pasa por los puntos $(\pm 12, 5)$.

11. Si p es una raíz de multiplicidad n de una función f, entonces $f(x) = (x-p)^n q(x)$, donde $q(p) \neq 0$.

    a) Pruebe que $h(x) = f(x)/f'(x)$ tiene una raíz simple en p.

    b) Pruebe que si aplicamos elmétodo de Newton-Raphson para hallar la ráiz simple p de $h(x)$, entonces el método queda:

    $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{(f'(x_k))^2 - f(x)f''(x)}$$

    c) Aplicar el método anterior para obtener la raíz de $f(x) = \mathrm{sen}(x^3)$ partiendo de $x_0 = 1$. Compararlo con el método usual de Newton-Raphson.

12. Discutir la convergencia del método del punto fijo para la función $F(x) = ae^x$, $a \in \mathbb{R}$, para condiciones iniciales en el intervalo $[0,1]$.

13. Un cambio de coordenadas (lineal) en el espacio viene dado por una matriz de $3x3$ A, de modo que si (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de un punto, entonces $A(x_1, x_2, x_3)^\top$ son las coordenadas del punto transformado.

    a) Plantear las ecuaciones que han de verificar los elementos de la matriz del cambio de coordenadas, para que dicho cambio transforme los puntos $(1,2,1)$, $(0,3,2)$, $(-1,-1,0)$ en (el triángulo) $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$.

    b) Resolver el sistema anterior mediante factorización LU.

    c) Obtener la matriz de cambio de coordenadas que transforme los puntos $(1,2,1)$, $(0,3,2)$, $(-1,-1,0)$ en (el triángulo) $(0,1,1)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$.

14. Se considera un disipador en forma de barra. Dividimos barra en 10 secciones de la misma longitud. Denotamos la temperatura de la sección i como x_i. Se sabe que en estado estacionario (es decir, cuando alcanza el equilibrio), se verifica el siguiente sistema de ecuaciones:

    $$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 10, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ \dots, \\ -x_8 + 4x_9 - x_{10} = 0, \\ -x_9 + 4x_10 = 0. \end{cases}$$

    a) Calcular la solución mediante el método de Gauss con pivote.

    b) Calcular la solución mediante dos pasos de Gauss-Seidel. ¿Cuál es el error cometido?

15. Un modo de interpolar una curva en el plano es considerar dicha curva en coordenadas paramétricas $(x(t), y(t))$ y realizar una interpolación polinomial de cada una de las curvas $x(t)$ e $y(t)$.

    Por ejemplo, si queremos interpolar los puntos $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$, asignamos un tiempo a cada punto (lo más sencillo es asignar los tiempos $1,2,3$). Entonces tenemos que interpolar:

t	1	2	3
x	0	1	2

y

t	1	2	3
y	0	1	4

Esto nos da dos polinomios interpoladores, $x(t) = t - 1$ para la primera tabla e $y(t) = t^2 - 3t + 1$ para la segunda.

Se pide realizar el mismo proceso para interpolar los puntos $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, suponiendo que se recorren en el orden anterior y en los tiempos $1, 2, 3, 4$.