PROBLEMAS DE LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS I
Ingeniería Técnica en Diseño Industrial

Tema I: El espacio $\mathbb{R}^n$. Funciones de varias variables

1. Calcular las siguientes operaciones con vectores:

   (a) $3(-2,3,0) - 2(0,5,-1) + (1,-2,-5)$.

   (b) $(3,0,2,-1) \cdot (1,0,-3,0)$.

   (c) Determinar dos vectores distintos ortogonales a $(3,-2,1)$.

   (d) Determinar un vector ortogonal a $(2,1,-3)$ de norma 2.

2. Determinar el coseno del ángulo que forma el vector $(2,0,-1)$ con la recta $x = 2 - \lambda$; $y = -1 + 2\lambda$; $z = \lambda$.

3. Determinar el coseno del ángulo que forma el vector $(0,-1,1)$ con la recta determinada por los planos $2x - y - z = 1$ y $3z + 2y = 0$.

4. Se llaman *cosenos directores de un vector* $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ a los cosenos de los ángulos α, β, γ que forma $\vec{v}$ con los vectores de la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

   (a) Demostrar que $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$.

   (b) Si $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ cumple que $\|\vec{v}\| = 2$ y $\cos\alpha = 1/2$ y $\cos\beta = -1/2$, determinar las coordenadas de $\vec{v}$.

5. Sean $\vec{u} = (1,2,-1), \vec{v} = (-1,1,0)$. Encontrar el coseno del ángulo que forma $\vec{u} \wedge \vec{v}$ con $\vec{w} = (2,-1,1)$.

6. ¿Está el punto $(1,0,-1)$ en la bola abierta de centro $(2,1,-1)$ y radio $\sqrt{3}$?, ¿y el punto $(1,2,-2)$?, ¿y el punto $(1,-1,1)$?.

7. Parametrizar cada uno de los siguientes conjuntos, calcular su interior y su frontera:

   (a) Conjunto de puntos limitado por el rectángulo de vértices:

$$(1,1), (5,1), (1,3), (5,3).$$

(b) Conjunto de puntos limitado por la curva $y = -x^2 + 4x - 3$ y la recta $y = 0$.

(c) Conjunto de puntos limitado por la curva $y = x^2 - 9$ y la recta $y = 5$.

(d) Conjunto de puntos limitado por las curvas $y = 16 - x^2$ e $y = x^2 - 4$.

8. Probar que no existe límite de f en $(0,0)$ en los siguientes casos:

   (a) $\dfrac{y^3 - x^2}{x^2 + y^2}$.

   (b) $\dfrac{y^2 - x^4}{x^4 + y^2}$.

   (c) $\dfrac{x^2y + xy^2}{x^3 + y^3}$ con $y \neq x$.

   (d) $\dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$.

9. Determinar el límite en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y) = |x + y|$.

   (b) $f(x,y) = x^2 \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$.

   (c) $f(x,y) = y$ si $x < 0$ y $f(x,y) = -y$ si $x \geq 0$.

10. Determinar los límites en $(-1,0)$ y en $(1,-1)$ de las siguientes funciones (en caso de que existan):

   (a) $f(x,y) = x + y$ si $|x + y| \leq 0$ y $f(x,x) = y - x$ si $|x + y| > 0$.

   (b) $f(x,y) = y$ si $x < 0$ y $f(x,y) = -y$ si $x \geq 0$.

11. Si $f(x,y) = \dfrac{y^4 + \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ cuando $(x,y) \neq (0,0)$, ¿podemos definir f en $(0,0)$ de modo que sea continua?.

12. Estudiar la continuidad en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

$$f(x,y) = \Big(\frac{x^2y}{yx^2 + y^2}, \sin(x + y)\Big).$$

$$g(x,y) = \Big(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \sin(x+y)\Big).$$

13. Estudiar la continuidad en todo punto de las siguientes funciones:

    (a) $f(x,y) = x+y$ si $|x+y| \leq 0$ y $f(x,x) = y-x$ si $|x+y| > 0$.

    (b) $f(x,y) = y$ si $x < 0$ y $f(x,y) = -y$ si $x \geq 0$.

    (c) $f(x,y) = x^2 \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$.

    (d) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ si $x+y \neq 0$, $f(x,y) = 0$ si $x+y = 0$.