PROBLEMAS DE LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS I
Ingeniería Técnica en Diseño Industrial

Tema II: Diferencial de una función

1. Calcula las derivadas direccionales en todo punto de cada una de las siguientes funciones escalares:

   (a) $f(x, y) = x^2 - x^4y^3$

   (b) $f(x, y, z) = e^{xyz}$

   (c) $f(x, y) = x^2 \cos(xy) + \ln(y^2)$

   (d) $f(x, y) = |x - y|$

   (e) $f(x, y, z) = (x^2 + z^3)/y$ si $y \neq 0$ y $f(x, y, z) = 0$ si $y = 0$

2. Calcula la diferencial en todo punto de las siguientes funciones:

   (a) $f(x, y) = x^3 + y^2 - xy$

   (b) $f(x, y, z) = xyz$

   (c) $f(x, y) = (x + y, x - y)$

   (d) $f(x, y, z) = (\cos(xy), \cos(xz))$

   (e) $f(x, y) = (e^x, e^y, e^{xy})$

   (f) $f(x, y, z) = (z, y, x)$

3. Calcular la derivada siguiendo el vector $\vec{v} = (1, -1, 2)$ de la función $f(x, y, z) = x^2 + z^2 + xyz$ en el origen y en el punto $(1, 1, 1)$.

4. Calcular la derivada siguiendo el vector $\vec{u} = (1, 2)$ en el origen de la función $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$ en el punto $(0, 0)$ y en el punto $(-1, 1)$.

   Calcular la derivadas parciales de la funciones $f(x, y) = 1 + x^2 - 3xy$ y $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$.

5. El potencial eléctrico, V, en un punto P del plano creado por una carga puntual situada en el origen de coordenadas viene expresado como

$$V(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

La derivada direccional siguiendo un vector de módulo 1 nos da la razón de cambio de una función en esa dirección, es decir, nos mide la velocidad de crecimiento o decrecimiento del valor de la función en esa dirección. Calcular la razón de cambio de potencial en la dirección de los ejes en el punto $(1, 1)$.

6. Hallar el vector gradiente de la función $f(x, y) = e^x \sin y + e^y \sin x$ en un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$.

7. Hallar el vector gradiente de la función $f(x, y) = e^y \cos y + \sin(x^2 + y^2)$ en un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$ y en $(0, 0)$.

8. Hallar la diferencial de las funciones $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$ en un punto genérico y en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 2)$.

9. Se denomina *jacobiano* al determinante de la matriz jacobiana, cuando ésta es una matriz cuadrada. Determinar el jacobiano de $f(x, y) = (x^2y, y^2, x)$ en el punto $(1, 2)$.

10. Calcular la diferencial de la función $f(x, y, z) = x^2 + z^2 + xyz$ en el origen. Utilizando la diferencial anteriormente calculada, obtener la derivada de f siguiendo el vector $\vec{v} = (1, -1, 2)$ $(D_{\vec{v}}f(a) = Df(a)(v))$.

11. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de la función $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

12. Estudiar el dominio de definición, la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones:

    (a) $f(x, y) = x^2y^3 - 2y^2 - e^{xy}$

    (b) $f(x, y, z) = xyz$ si $x + y + z < 1$, $f(x, y, z) = 0$ si $x + y + z > 0$

    (c) $f(x, y) = (x + y, x - y)$ si $x > 0$, $f(x, y) = (x - y, x + y)$ si $x \leq 0$

    (d) $f(x, y, z) = (\cos(xy), \cos(xz))$ si $z \neq 0$, $f(x, y, z) = 0$ si $z = 0$

    (e) $f(x, y) = (e^x, e^y, e^{-xy})$

    (f) $f(x, y, z) = (z, y, x)$ si $x > 0$, $y > 0$ y $z > 0$, $f(x, y, z) = (z, x, y)$ si $x \leq 0$ y $z \leq 0$

    (g) $f(x, y) = |x - y|$

    (h) $f(x, y, z) = (x^2 + z^3)/(z + y)$ si $z + y \neq 0$ y $f(x, y, z) = 0$ si $z + y = 0$