

PROBLEMAS DE LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS I
Ingeniería Técnica en Diseño Industrial

Tema III: Curvas y superficies

1. Hallar una expresión implícita para las siguientes curvas de ecuaciones paramétricas:
 - (a) $x = a\lambda - 1, y = a\lambda, z = \lambda + a, \lambda \in \mathbb{R}$.
 - (b) $x = a \cos \lambda, y = a \operatorname{sen} \lambda, z = a \operatorname{sen} \lambda, \lambda \in [0, 2\pi)$.
 - (c) $x = a \cos^2 \lambda, y = a \cos \lambda \operatorname{sen} \lambda, z = a \operatorname{sen} \lambda, \lambda \in [0, 2\pi)$.
2. Obtener ecuaciones paramétricas para cada una de las siguientes curvas:
 - (a) $x^2 + z^2 = 1, y = x^2$.
 - (b) $x^2 + 4y^2 = 4, z = x^2 + 1$.
 - (c) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1, z = \ln |x|$.
 - (d) $x^3 + y^3 = 2, z = x^2 - 1$.
 - (e) $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$.
3. Dada la curva $x(t) = t, y(t) = t^2, z(t) = t^3$, con $t \in \mathbb{R}$, encontrar una ecuación explícita y otra implícita, y determinar la ecuación de la recta tangente en los puntos $t = 0$ y $t = 1$.
4. Sea la curva $x = \lambda^2 - 1, y = \lambda^3 - \lambda, z = \operatorname{sen} \pi\lambda$, con $-\pi/2 \leq \lambda \leq \pi/2$. ¿Es múltiple el punto $(0, 0, 0)$ de dicha curva?
5.
 - (a) Hallar la recta tangente a la hélice circular $x' = \cos \lambda, y = \operatorname{sen} \lambda, z = \lambda + 3$ en el punto correspondiente a $z = 4$.
 - (b) Hallar las rectas tangentes a la curva $x = \lambda^2 - 1, y = \lambda^3 - \lambda, z = \operatorname{sen} \pi\lambda$ en los
6. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 1$, en los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 1)$.
7. Dada la curva $r(t) = (2 - t\sqrt{t}/3, 1 - t, 1 + t)$, se pide
 - (a) Hallar una ecuación paramétrica.

- (b) Hallar una ecuación explícita y otra implícita de dicha curva.
 - (c) Hallar la ecuación de la recta tangente y el plano normal a dicha curva en el punto correspondiente a $z = 1$.
8. Sea la curva $x = \cos \lambda$, $y = \sin \lambda$, $z = \operatorname{tg} \lambda$ para $0 < \lambda < \pi/2$. Hallar las nuevas ecuaciones paramétricas si se efectúa el cambio de parámetro $\operatorname{tg} \lambda = \mu$.
9. Obtener una ecuación paramétrica para cada una de las siguientes superficies:
- (a) Cilindro elíptico $x^2 + 4y^2 = 4$.
 - (b) Plano xz ($y = 0$).
 - (c) Plano $x + y + z = 1$
 - (d) Elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

Obtener las ecuaciones (paramétricas e implícitas) cuando efectuamos el cambio de parámetros $\bar{u} = 3u + v$, $\bar{v} = v - 3u + 1$.

10. Obtener una ecuación implícita para cada una de las siguientes superficies:
- (a) Cilindro $s(u, v) = (\sin u, \cos u, v)$, $u, v \in \mathbb{R}$.
 - (b) Esfera $s(u, v) = (\sin u \sin v, \cos u, \sin u \cos v)$, $u, v \in \mathbb{R}$.
 - (c) Plano $s(u, v) = (4u + v + 1, u - 1, v - u)$, $u, v \in \mathbb{R}$.

Hallar las ecuaciones de las superficies en coordenadas esféricas.

11. Hallar la ecuación del plano tangente en el origen al paraboloides $z = x^2 + y^2$.
12. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$, $u, v \in \mathbb{R}$, en el punto $P = s(\pi/3, \pi/3)$.