PROBLEMAS DE LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS I
Ingeniería Técnica en Diseño Industrial

Tema IV: Derivadas de orden superior

1. Dadas las funciones: $f(x,y) = x^y + e^{xy}$ y $g(x,y,z) = (xyz)^3$.
   (a) Hallar el valor de f_{xy}, f_{xyy}, f_{yxy} en un punto cualquiera de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Hallar el valor de g_{xyz}, g_{zxy}, g_{yzx} en un punto cualquiera de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Calcular
$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2}(x,y).$$

2. Sea $f(x,y) = e^x \sin y$. Calcular
$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y), \quad \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y \partial x^n}(x,y), \quad \frac{\partial^{n+2} f}{\partial x^n \partial y^2}(x,y).$$

3. Calcular, caso de que existe, la matrix hessiana en el punto $(0,0)$ asociada a cada una de las siguientes funciones:
   (a) $f(x,y,z) = x^3y^2 - x^2z^3 + y^3z^2$.
   (b) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$.

4. Determinar el valor de la expresión
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z),$$
siendo f la distancia del punto al origen ($f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$), en los puntos en los que sea posible.

5. Se dice que una función $z = z(t,x,y)$ satisface la "Ecuación de ondas" si verifica la siguiente ecuación en derivadas parciales para alguna constante $k \in \mathbb{R}$:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right).$$
Comprobar que la función $z = z(t,x,y) = \sin ax \sin by \sin(kt\sqrt{a^2+b^2})$ donde a, b, k son tres constantes en $\mathbb{R}$, verifica la ecuación de ondas.

6. Hallar los extremos de las siguientes funciones
   (a) $f(x, y) = x^6 + x^3 y + y^3$.
   (b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$.
   (c) $f(x, y) = x^2 - 4xy^2 + 4y^4$.
   (d) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + x^2 y^2$.
   (e) $f(x, y) = x^2 + y^2$, definida en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

7. Una industria fabrica dos tipos de productos, A y B. Los precios de venta en euros de cada unidad del producto A y del producto B, llamémoslo p_1 y p_2, respectivamente, vienen dados por las siguientes funciones: $p_1 = 280 - 3x$ y $p_2 = 260 - y$, donde x e y representan la cantidad producida de unidades del producto A y del producto B, respectivamente.

   El coste de fabricación de x unidades del producto A e y unidades del producto B, viene dado por la siguiente función de coste: $C(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy$.

   Hallar el número de unidades del producto A y del producto B que han de fabricarse para que el beneficio sea máximo.

8. Hallar la mínima distancia de los puntos de la superficie $x^2 + yz + y = 5$ al origen de coordenadas.

9. Calcular la longitud de los lados de un tetrabric de 1 litro de capacidad para que su superficie (luego el coste de producción) sea mínima.

10. Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en los conjuntos:
    (a) $x^2 + 2y^2 = 1$.
    (b) $x^2 - y^2 = 1$.
    (c) $x^2 + y \leq 2$.
    (d) $2x^2 + 4y^2 \leq 6$.

11. Estudiar los extremos de las siguientes funciones:
    (a)
    $$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x \geq 0, \\ x - y & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{si } x^2+y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

(d)

$$f(x,y) = \begin{cases} 1-\sqrt{x^2+y^2} & \text{si } xy \geq 0 \text{ y } x^2+y^2 \leq 1, \\ \sqrt{x^2+y^2}-1 & \text{si } xy < 0 \text{ y } x^2+y^2 \leq 1. \end{cases}$$