PROBLEMAS DE LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS I
Ingeniería Técnica en Diseño Industrial

Tema V: La integral doble

1. Calcular las siguientes integrales definidas:

$$\int_0^1 (x^3 - 2x + 1)dx, \quad \int_0^\pi \sin(3x)dx, \quad \int_{-2}^2 \frac{1}{x^4}dx, \quad \int_0^3 \sqrt{x+1}dx,$$

$$\int_0^1 e^{2x-1}dx, \quad \int_{-1}^1 (x^2 e^x)dx, \quad \int_1^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx, \quad \int_1^2 (\cos x \sin x)dx,$$

2. Hallar el área encerrada por la curva $y = x^2 + x - 2$, las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje OX.

3. Hallar el área encerrada por la curva $y = |x^2 - 4x + 3|$ entre $x = 0$, $x = 4$ y el eje de abcisas.

4. Calcular el área del círculo de radio r y centro el origen de coordenadas.

5. Calcular el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

6. Calcular el área encerrada por las parábolas $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$.

7. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y^3 = x$, la recta $y = 1$ y la recta $x = 8$.

8. Calcular el área encerrada por la curva $y^2 = x^2 - x^4$.

9. Calcular el volumen engendrado por la rotación de una circunferencia de centro 0 y radio r alrededor del eje OX.

10. Hallar el volumen del sólido generado por la revolución alrededor del eje OY del área comprendida en el primer arco del cicloide $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ y el eje OX.

11. Calcular los volúmenes engendrados al girar alrededor del eje OX y del eje OY la recta $y = 11 - 3x$ entre las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

12. Calcular el área de la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje OX de la parábola $y^2 = 4x$ entre $x = 0$ y $x = 2$.

13. Calcular el área de la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje OX del lazo de la curva $9y^2 = x(3 - x)^2$.

14. Hallar el área engendrada por la curva $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ al girar alrededor del eje OX entre $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2}$.

15. Calcular la longitud del arco de curva $y = 2x\sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 2$.

16. Hallar la longitud del arco de curva $y = \ln \frac{e^x-1}{e^x+1}$ entre $x = 2$ y $x = 4$.

17. Calcular la longitud del arco de curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ entre $t = 0$ y $t = 4$.

18. Calcular la longitud del arco de curva $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2t^3}{3}$ entre $t = 0$ y $t = 1$.

19. Calcular la longitud del arco de curva $x = 2\cos t$ $y = 2\sin t$, $z = \frac{3}{\pi}t$.

20. Calcular las siguientes integrales:

    (a) $\displaystyle\int_S\int xdxdy$ siendo S el recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por las curvas $y = x^2 + x$, $y = 2x^2 - 2$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$. SOLUCIÓN: $\dfrac{19}{12}$.

    (b) $\displaystyle\int_S\int (x+y)dxdy$, siendo S el recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por las rectas $y = 2$, $y = 1$ $x = 3y$ y $x = y$. SOLUCIÓN: 14.

    (c) $\displaystyle\int_S\int \sqrt{a^2 - x^2}dxdy$, siendo S el recinto del primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = a^2$. SOLUCIÓN: $\dfrac{2a^3}{3}$.

    (d) $\displaystyle\int_S\int xe^{\frac{-x^2}{y}}dxdy$, siendo S el recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por la curva $y = x^2$ y las rectas $y = 1$, $y = 2$ y $x = 0$. SOLUCIÓN: $\dfrac{3(e-1)}{4e}$.

    (e) $\displaystyle\int_S\int \sqrt{2ax - x^2 - y^2}dxdy$, hallando su expresión en un nuevo sistema de coordenadas dado por $x = a + u\cos v$, $y = u\sin v$, siendo S el recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. SOLUCIÓN: $\dfrac{2\pi a^3}{3}$.

(f) $\displaystyle\int_S\int \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, siendo S el recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por el circulo de radio $R=1$ y centro en $(0,0)$. SOLUCIÓN: $\dfrac{2\pi}{3}$.

(g) $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$. SOLUCIÓN: $\dfrac{\pi a^3}{6}$.

(h) $\displaystyle\int_S\int \frac{x^2}{y^2}dxdy$, siendo S el recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por la curva $y=\frac{1}{x}$ y las rectas $y=x$, $x=1$ y $x=2$. SOLUCIÓN: $\dfrac{9}{4}$.

(i) $\displaystyle\int_S\int ydxdy$, siendo S el semicírculo de diámetro a y centro en el punto $C=(\frac{a}{2},0)$. SOLUCIÓN: $\dfrac{a^3}{12}$.

(j) $\displaystyle\int_S\int (x^2+y^2)dxdy$, siendo S el recinto limitado por la circunferencia $x^2+y^2=2ax$. SOLUCIÓN: $\dfrac{3\pi a^4}{2}$.

(k) $\displaystyle\int_S\int (x^2+y^2)dxdy$ siendo S el recinto de $\mathbb{R}^2$ delimitado por la elipse: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. SOLUCIÓN: $\dfrac{39\pi}{2}$.

21. Calcular las siguientes áreas:

(a) Área de la región del plano limitada por la curva $y=x^2$ y las rectas $y=2x$ y $x=1$. SOLUCIÓN: $\dfrac{2}{3}u^2$.

(b) Área de la región del plano situada sobre el eje OX y limitada por dicho eje, la parábola $y^2=4x$ y la recta $x+y=3$. SOLUCIÓN: $\dfrac{10}{3}u^2$.

(c) Área de la región del plano situada en el primer cuadrante y limitada por la parábola semicúbica $y^2=x^3$ y la bisectriz del primer cuadrante $x=y$. SOLUCIÓN: $\dfrac{1}{10}u^2$.

(d) Área del paraboloide $x^2+y^2=2z$ limitada por el plano $z=2$. SOLUCIÓN: $\dfrac{2\pi(5\sqrt{5}-1)}{3}u^2$.

(e) Área de la superficie del paraboloide $z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}$ limitada por el cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. SOLUCIÓN: $\dfrac{2\pi ab(2\sqrt{2}-1)}{3}u^2$.

(f) Área de la parte de la superficie del paraboloide $y^2 + z^2 = 2ax$ comprendida entre el cilindro $y^2 = ax$ y el plano $x = a$. SOLUCIÓN: $\dfrac{2a^2(3\sqrt{3}-1)}{3}u^2$.

22. Calcular los siguientes volúmenes:

(a) Volumen en el primer octante comprendido entre el plano O X Y, el plano $z = x + y + 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 16$. SOLUCIÓN: $\left(\dfrac{128}{3} + 8\pi\right)u^3$.

(b) Volumen limitado por las superficies: $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, el plano O X Y y el plano $y = 1$. SOLUCIÓN: $\dfrac{88}{105}u^3$.

(c) Volumen limitado por las superficies: $x^2 + 4y^2 = z$, el plano O X Y y lateralmente por $y = x^2$ y $x = y^2$. SOLUCIÓN: $\dfrac{3}{7}u^3$.

(d) Volumen limitado por las superficies: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x+z = 6$ y $z = 0$. SOLUCIÓN: $\dfrac{48\sqrt{6}}{5}u^3$.