

**PROBLEMAS DE LA ASIGNATURA AMPLIACIÓN DE
MATEMÁTICAS
Ingeniería Técnica en Topografía**

Tema III: Matrices y determinantes.

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calcular:

- (a) $2A - 3B$
- (b) $(CD)t - A2$
- (c) $(3A - I3)(I3 - B)$
- (d) $AB - BA$
- (e) ABA

2. Hallar las matrices M y N que verifican:

$$3M - 2N = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 \\ -6 & -8 & 7 \end{pmatrix}, \quad 5M + 7N = \begin{pmatrix} 12 & 28 & 47 \\ 52 & 28 & 22 \end{pmatrix}.$$

3. Sean las matrices $A \in M_{2 \times 1}$, $B \in M_{1 \times 3}$ y $C \in M_{3 \times 1}$. Indicar si son posibles los siguientes productos y, en caso afirmativo, dar el orden de la matriz resultante:

- (a) $A(BC)$
- (b) ACB
- (c) BAC
- (d) BCA
- (e) $B^t C^t A$

(f) $(BC)^t A^t$

4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hallar los productos AB y BA .

5. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

calcular:

(a) $(A + B)(A - B)$

(b) $A^2 - B^2$

(c) $(A + B)^2$

(d) $A^2 + 2AB + B^2$

¿Por qué las respuestas de los apartados a) y b) no coinciden?. ¿Y las de c) y d)?.

6. Sean A y B matrices cuadradas de orden n que verifican que $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, A es simétrica y B es ortogonal ($B^{-1} = B^t$). Simplificar la siguiente expresión:

$$C = (A(B - A))^t - B^{-1}A^t + A(A + B^{-1}) - (BA)^t + A$$

7. Sean $A \in M_n$, $B \in M_{n \times m}$ y $C \in M_{n \times m}$, tales que $|A| \neq 0$ y $AB = AC$. Probar que $B = C$. ¿Qué ocurre si $|A| = 0$?. Poner un ejemplo.

8. Sean A y B dos matrices tales que $AB = 0$ y que A es una matriz inversible. Probar que B tiene que ser la matriz nula.

9. Hallar las inversas de las siguientes matrices, justificando previamente su existencia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Hallar la matriz X que verifica:

(a) $AX = B$: donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) $BXA = B$: donde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) $AX - BX = C$: donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 8 \\ 12 & 0 & 1 & 20 \\ -33 & 8 & -1 & -30 \end{pmatrix}$$

11. Sean A y B dos matrices tales que $A + B = P$ y $A - B = Q$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Determinar $A^2 - B^2$.

12. Dado el sistema matricial

$$\begin{cases} (X + Y)C = X, \\ C - Y = 3I - 2A. \end{cases}$$

Se pide:

- Despejar X e Y , indicando las propiedades que deben cumplirse para poder efectuar las operaciones.
- Determinar X e Y en el caso particular de que

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

13. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 6 & 6 \end{pmatrix},$$

hallar las matrices X e Y que satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} X + AY^t = B, \\ X^t + YC = D. \end{cases}$$

14. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

15. Desarrollar los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} x+y & x+2y \\ x-y & x-2y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a^2-b^2 & (a-b)^2 \\ a^2+ab & ab-b^2 \end{pmatrix}$$

16. Resolver la ecuación $|A - xI| = 0$, donde I es la matriz identidad de orden dos y

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

17. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

18. Probar las igualdades siguientes utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & a & b+c \\ a & b & c+a \\ a & c & a+b \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

19. Indicar cual de las siguientes afirmaciones es cierta para $A \in M_5$:

- (a) $|A + A| = |A|$
 (b) $|A + A| = 32|A|$
 (c) $|A + A| = 2|A|$

20. Sea $A \in M_n$ tal que $A^2 = -I_n$. Probar que A es invertible y que n tiene que ser par.

21. Hallar el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

22. Estudiar el rango de las siguientes matrices según los valores de los parámetros de los que dependen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ -1 & 3 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1b^2 \\ 1 & 1 & 2a & b \\ 1 & 1 & 2a & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$