**PROBLEMAS DE LA ASIGNATURA AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS**
**Ingeniería Técnica en Topografía**

## Tema V: Espacios vectorales. Aplicaciones lineales

1. De las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$, determinar cuáles son lineales y obtener su matriz respecto a la base canónica.

   (a) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + a, x_2 + b, x_3 + c)$, donde $a$, $b$ y $c$ son tres números reales fijos no simultáneamente nulos.

   (b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1 + x_3)$.

   (c) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$.

   (d) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2, x_3)$.

2. Sea $P_3(x)$ el conuunto de polinomios de coerficientes reales, grado menor o igual a tres y una indeterminada $x$. Hallar la matriz de la aplicación lineal $f$ definida en $P_3(x)$ y con valores en $P_1(x)$ que a cada polinomio le hace corresponder su derivada segunda. Calcular matricialmente la derivada segunda de $x^3 + 3x^2 + 7x - 6$.

3. Consideremos la base usual de $\mathbb{R}^2$ y el endomorfismo $G_\alpha$ que a cada vector $\vec{u}$ le hace corresponder el vercor obtenido al girarlo $\alpha$ radianes con centro el origen.

   (a) Calcular la matriz de $G_\alpha$.

   (b) Comprobar matricialmente que la composición de dos giros de amplitudes $\alpha$ y $\beta$ es un nuevo giro de amplitud $\alpha + \beta$.

4. Hallar la matriz correspondiente a una simetría axial $S_e$ respecto a un eje $e$ que forma un ángulo de $\alpha$ radianes con $OX$. Una simetría axial es la que hace corresponder a cada vector $\vec{u}$ el simétrico respecto a $e$.

5. Sea $f$ una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tal que

   $$f(1,1,1) = (2,-1), \quad f(1,0,1) = (1,1), \quad f(0,0,1) = (0,4).$$

   (a) Calcular la matriz de $f$ respecto a la base canónica.

   (b) Calcular la matriz de $f$ cuando se toma como base de $\mathbb{R}^3$ la terna de vectores $\{(3,1,0), (0,1,2), (-2,0,1)\}$.

6. Hallar la matriz en la base canónica de un endomorfismo $f$ de $\mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:

   (a) El núcleo está generado por $(1, 1, -1)$.

   (b) La imagen de $(1, 1)$ es $(0, 1, 0)$.

   (c) El vector $(1, -2, 0)$ pertenece a $f^{-1}(2, 0, 0)$.

   Obtener una base de la imagen de $f$.

7. Se considera el endomorfismo $f$ de $\mathbb{R}^3$ definido por las ecuaciones

   $$y_1 = 3x_2 + 2x_2 + x_3, \quad y_2 = -x_1 + 4x_2 - 2x_3, \quad y_3 = 2x_1 + 6x_2 - x_3.$$

   (a) Calcular su núcleo.

   (b) Hallar una base del subespacio vectorial suplementario del núcleo.

   (c) Comprobar que la imagen por $f$ de la base calculada en b) es una base de la imagen de $f$.

8. Calcular la matriz del endomorfismo $f$ definido en $\mathbb{R}^3$ por

   $$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 - x_1).$$

   Calcular la imagen del vector $(3, 7, -4)$.

9. Sea $f$ un endomorfismo definido en $\mathbb{R}^2$ por $f(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, 4x_1)$, y sea $g$ la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que

   $$g(1, 0) = (1, -2, 1), \quad g(1, 1) = (2, 0, 0).$$

   Hallar la matriz, el núcleo y la imagen de las aplicaciones $f$ y $g$ y de la aplicación compuesta $g \circ f$.

10. Discutir para qué valores del parámetro $a$ el endomorfismo $f$ definido en $\mathbb{R}^3$ y cuya matriz respecto a las bases canónicas es

    $$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{pmatrix}$$

    es un automorfismo.

11. Para cada una de las aplicaciones lineales dadas por las matrices siguientes, obtener el núcleo, la imagen, la dimensión del núcleo, la dimensión de la imagen y decir de qué tipo son.

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Tomemos en $\mathbb{R}^3$ la base usual. Sean $f, g$ endomorfismos determinados por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular el núcleo y la imagen de $f$ y $g$.

(b) Calcular las matrices de $f+g$, $f-4g$, $f \circ g$, $f \circ f$, $f^{-1}$, siempre que se pueda.

(c) Calcular las matrices de $f$ y $g$ cuando en $\mathbb{R}^3$ tomamos la base $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.

(d) Obtener la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ para la cual $A$ es la matriz de cambio de coordenadas de $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ a $\{u_1, u_2, u_3\}$.

(e) Siendo $\{u_1, u_2, u_3\}$ la base obtenida en el apartado anterior, calcular la matriz de $g$ en dicha base.