PROBLEMAS DE LA ASIGNATURA AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
Ingeniería Técnica en Topografía

Tema VI: Espacio Afín

1. En el espacio afín $(\mathbb{A}_3, \mathbb{R}^3, +)$, determinar cuatro puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 tales que los vectores fijos $\vec{P_1P_2}$, $\vec{P_1P_3}$ y $\vec{P_1P_4}$ sean linealmente independientes.

2. En el espacio afín $(\mathbb{A}_3, \mathbb{R}^3, +)$ justificar que es imposible la existencia de cinco puntos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 tales que los vectores fijos $\vec{P_1P_2}$, $\vec{P_1P_3}$, $\vec{P_1P_4}$ y $\vec{P_1P_5}$ sean linealmente independientes.

3. Sean los puntos $P_0 = (0,0,0,0)$, $P_1 = (1,0,0,0)$, $P_2 = (1,2,0,0)$, $P_3 = (1,2,3,0)$ y $P_4 = (1,2,3,4)$. Demostrar que
$$\{P_0, \vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}, \vec{P_0P_3}, \vec{P_0P_4}\},$$
forman un sistema de referencia de $(\mathbb{A}_4, \mathbb{R}^4, +)$.

4. Hallar en el espacio afín $\mathbb{A}_3$ la variedad lineal generada por los puntos $B = (1,3,2)$, $C = (2,4,3)$ y $D = (4,6,5)$. Determinar los planos que pasan por $P = (1,3,4)$ y son incidentes con V. Trazar dos planos que pasen por P y sean paralelos a V.

5. Probar que en el espacio afín $\mathbb{A}_{\not\not\mathbb{K}}$ el plano que parsa por los puntos $(a_1,0,0)$, $(0,a_2,0)$ y $(0,0,a_3)$ tiene por ecuación
$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} + \frac{z}{a_3} = 1.$$
Supondremos que $a_i \neq 0$, $i = 1,2,3$.

6. Dadas las variedades lineales X e Y de un espacio afín $\mathbb{A}$ se llama suma de las variedades lineales X e Y a la mínima variedad que contiene a X y a Y. Se representa por $X + Y$. Construir un ejemplo en el que la diménsión de $X + Y$ sea mayor que la suma de dimensiones de X y de Y.

7. Consideremos dos variedades lineales $X = P + V$ e $Y = Q + W$, V, W subespacios vectoriales. Si X e Y no se cortan, demostrar que el vector fijo $\vec{PQ}$ no pertenece al espacio vectorial $V + W$. Como consecuencia demostrar que en este caso la dimensión de $X + Y$ es $1 + dim(V + W)$.

8. Hallar la mínima variedad que contiene a las rectas $(2,4,5)+\lambda(1,-1,-1)$ y $(2,4,5)+\lambda(2,1,2)$.

9. Hallar la intersección del plano
$$(1,1,2)+\lambda_1(2,-1,-1)+\lambda_2(1,0,-1)$$
con la recta
$$(7,2,4)+\lambda(1,1,1).$$

10. Probar que las rectas
$$(1,0,2)+\lambda(2,3,1), \quad (2,0,1)+\lambda(3,1,0)$$
se cruzan.