PROBLEMAS DE LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS I
Ingeniería Técnica en Diseño Industrial

Segunda práctica. Extremos e integración.

1. Calcular los siguientes extremos:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en la región

   $$\{(x,y)\colon 1 \leq |x| \leq 2,\ 1 \leq |y| \leq 2\}.$$

   (b) $f(x,y) = 1 + x + y + x^2 + xy + y^2$ en la región

   $$\{(x,y) = x^2 + 2y^2 - x \leq 1\}.$$

   Calcular las siguientes integrales dobles:

   (a) Calcular la integral

   $$\int_D\int \sin(xy)dxdy,$$

   donde D es la región limitada por las curvas

   $$y = \frac{x^2+1}{2}, \quad y = -\frac{x^2+1}{2}, \quad x = \frac{y^2+1}{2}, \quad x = -\frac{y^2+1}{2}.$$

   (b) Calcular la integral

   $$\int_D\int \frac{1}{2x^2+y^2}dxdy,$$

   Donde D es la región limitada por las elipses $2x^2 + y^2 = 1$ y $2x^2 + y^2 = 2$.

   Nota: Razonar porqué podemos integrar en cada una de las regiones.

2. Determinamos la forma de una botella mediante la intersección de las superficies (la hemos parametrizado por r para poder escalarla al tamaño que necesitemos):

$$z = 0, \quad x = r, \quad x = -r, \quad y = r, \quad y = -r, \quad z = 2.5r$$

$$\{(x, y, z)\colon (z - 2r)^2 - x - r = 0, \quad 2r \leq z \leq 2.5r\},$$

$$\{(x, y, z)\colon -(z - 2r)^2 - x + r = 0, \quad 2r \leq z \leq 2.5r\},$$

$$\{(x, y, z)\colon (z - 2r)^2 - y - r = 0, \quad 2r \leq z \leq 2.5r\},$$

$$\{(x, y, z)\colon -(z - 2r)^2 - y + r = 0, \quad 2r \leq z \leq 2.5r\},$$

(a) Calcular el valor de r (tamaño de la botella) para que el volumen sea 1.

(b) Supongamos que no queremos mantener la relación entre la base y la altura. Entonces la botella la obtenemos mediante la intersección de las superficies:

$$z = 0, \quad x = s, \quad x = -s, \quad y = s, \quad y = -s, \quad z = 2.5r$$

$$\{(x, y, z)\colon \frac{s^2}{r^2}(z - 2r)^2 - x - s = 0, \quad 2r \leq z \leq 2.5r\},$$

$$\{(x, y, z)\colon -\frac{s^2}{r^2}(z - 2r)^2 - x + s = 0, \quad 2r \leq z \leq 2.5r\},$$

$$\{(x, y, z)\colon \frac{s^2}{r^2}(z - 2r)^2 - y - s = 0, \quad 2r \leq z \leq 2.5r\},$$

$$\{(x, y, z)\colon -\frac{s^2}{r^2}(z - 2r)^2 - y + s = 0, \quad 2r \leq z \leq 2.5r\}.$$

Determinar de todas las botellas de volumen uno, los valores r y s para que la superficie de la botella (y por tanto el coste) sea mínimo.

Nota: Dividir el problema en trozos para simplificar los cálculos. Usar las simetrías del problema para reducir el número de operaciones.