PROBLEMAS DE LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS I
Ingeniería Técnica en Diseño Industrial

1. **Estudia la continuidad, diferenciabilidad y existencia de derivadas parciales de las siguientes curvas. Calcula las derivadas parciales y la diferencial en los puntos que sea posible.**

   (a)
$$f(\lambda)=\begin{cases}(|\lambda|,\lambda,0) & \text{si } 0<\lambda<1,\\ (0,-\lambda,|\lambda|) & \text{si } -1<\lambda\leq 0.\end{cases}$$

Solución:
La función f es una función vectorial, definida

$$f\colon(-1,1)\to\mathbb{R}^3.$$

En el abierto $(-1,0)$, la función f está definida como

$$f(\lambda)=(0,-\lambda,-\lambda),$$

por tanto es continua y diferenciable en dicho abierto por ser composición de funciones continuas y diferenciables.
En el abierto $(0,1)$, la función f está definida como

$$f(\lambda)=(\lambda,\lambda,0),$$

por tanto es continua y diferenciable en dicho abierto por ser composición de funciones continuas y diferenciables.
Únicamente falta estudiar la continuidad y diferenciabilidad en $\lambda=0$. Para esto, basta estudiar la continuidad y diferenciabilidad de sus funciones coordenadas en $\lambda=0$. Es decir, si $f=(f_1,f_2,f_3)$, debemos estudiar f_1, f_2 y f_3, donde:

$$f_1(\lambda)=\begin{cases}\lambda & \text{si } 0<\lambda<1,\\ 0 & \text{si } -1<\lambda\leq 0.\end{cases}$$

$$f_2(\lambda)=\begin{cases}\lambda & \text{si } 0<\lambda<1,\\ -\lambda & \text{si } -1<\lambda\leq 0.\end{cases}$$

$$f_3(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \lambda < 1, \\ -\lambda & \text{si } -1 < \lambda \leq 0. \end{cases}$$

Como son funciones de una variable, serán continuas en cero si y sólo si sus límites laterales en cero coinciden. Calculemos dichos límites:

$$\lim_{\lambda \to 0^\pm} f_1(\lambda) = 0,$$

$$\lim_{\lambda \to 0^\pm} f_2(\lambda) = 0,$$

$$\lim_{\lambda \to 0^\pm} f_3(\lambda) = 0.$$

Por tanto f_1, f_2 y f_3 son continuas en $\lambda = 0$, luego f es continua en $\lambda = 0$.

Para calcular la diferenciabilidad, basta calcular las derivadas laterales y ver si coinciden. Calculemos dichas derivadas:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f_1(\lambda) - 0}{\lambda} = 1, \quad \lim_{\lambda \to 0^-} \frac{f_1(\lambda) - 0}{\lambda} = 0.$$

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f_2(\lambda) - 0}{\lambda} = 1, \quad \lim_{\lambda \to 0^-} \frac{f_2(\lambda) - 0}{\lambda} = -1.$$

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f_3(\lambda) - 0}{\lambda} = 0, \quad \lim_{\lambda \to 0^-} \frac{f_3(\lambda) - 0}{\lambda} = 1.$$

Como no coinciden, f_1, f_2 y f_3 no son derivables en $\lambda = 0$, luego f no es derivable en $\lambda = 0$ (bastaría que una de las tres no fuese derivable para que f no sea derivable).

Finalmente, calculemos la direfencial en los puntos en los que es posible, es decir, $\lambda \in (-1, 1)$ y $\lambda \neq 0$.

$$Df(\lambda) = \begin{cases} (1, 1, 0) & \text{si } 0 < \lambda < 1, \\ (0, -1, -1) & \text{si } -1 < \lambda < 0. \end{cases}$$

Las derivadas parciales serán cada una de las funciones coordenadas de Df (en este caso las derivadas parciales existen únicamente donde la función es diferenciable, como hemos probado antes).

(b)

$$f(\lambda)=\begin{cases}(1-\sin\lambda,0,1-\cos\lambda) & \text{si } -\pi/2<\lambda<0,\\ (\cos\lambda,\sin\lambda,0) & \text{si } 0\leq\lambda\leq\pi/2,\\ (0,1-\sin\lambda,1-\cos\lambda) & \text{si } \pi/2<\lambda<\pi.\end{cases}$$

Solución:
La función f es una función vectorial, definida

$$f\colon(-\pi/2,\pi)\to\mathbb{R}^3.$$

En el abierto $(-\pi/2,0)$, la función f está definida como

$$f(\lambda)=(1-\sin\lambda,0,1-\cos\lambda),$$

por tanto es continua y diferenciable en dicho abierto por ser composición de funciones continuas y diferenciables.
En el abierto $(0,\pi/2)$, la función f está definida como

$$f(\lambda)=(\cos\lambda,\sin\lambda,0),$$

por tanto es continua y diferenciable en dicho abierto por ser composición de funciones continuas y diferenciables.
En el abierto $(\pi/2,\pi)$, la función f está definida como

$$f(\lambda)=(0,1-\sin\lambda,1-\cos\lambda),$$

por tanto es continua y diferenciable en dicho abierto por ser composición de funciones continuas y diferenciables.
Únicamente falta estudiar la continuidad y diferenciabilidad en $\lambda=0$ y $\lambda=\pi/2$. Para esto, basta estudiar la continuidad y diferenciabilidad de sus funciones coordenadas en $\lambda=0$. Es decir, si $f=(f_1,f_2,f_3)$, debemos estudiar f_1, f_2 y f_3, donde:

$$f_1(\lambda)=\begin{cases}1-\sin\lambda & \text{si } -\pi/2<\lambda<0,\\ \cos\lambda & \text{si } 0\leq\lambda\leq\pi/2,\\ 0 & \text{si } \pi/2<\lambda<\pi.\end{cases}$$

$$f_2(\lambda)=\begin{cases}0 & \text{si } -\pi/2<\lambda<0,\\ \sin\lambda & \text{si } 0\leq\lambda\leq\pi/2,\\ 1-\sin\lambda & \text{si } \pi/2<\lambda<\pi.\end{cases}$$

$$f_3(\lambda) = \begin{cases} 1-\cos\lambda & \text{si } -\pi/2 < \lambda < 0, \\ 0 & \text{si } 0 \leq \lambda \leq \pi/2, \\ 1-\cos\lambda & \text{si } \pi/2 < \lambda < \pi. \end{cases}$$

Continuidad y diferenciabilidad en 0:
Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{\lambda\to 0^-} f_1(\lambda) = 1, \quad \lim_{\lambda\to 0^+} f_1(\lambda) = 1$$

$$\lim_{\lambda\to 0^-} f_2(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda\to 0^-} f_2(\lambda) = 0$$

$$\lim_{\lambda\to 0^-} f_3(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda\to 0^+} f_3(\lambda) = 0.$$

Como coinciden y f_1, f_2 y f_3 son funciones de una variable, f_1, f_2 y f_3 son continuas en $\lambda = 0$, luego f es continua en $\lambda = 0$.
Para calcular la diferenciabilidad, basta calcular las derivadas laterales y ver si coinciden. Calculemos dichas derivadas:

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f_1(\lambda) - f_1(0)}{\lambda} = 0, \quad \lim_{\lambda\to 0^-} \frac{f_1(\lambda) - f_1(0)}{\lambda} = -1.$$

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f_2(\lambda) - f_2(0)}{\lambda} = 1, \quad \lim_{\lambda\to 0^-} \frac{f_2(\lambda) - f_2(0)}{\lambda} = 0.$$

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f_3(\lambda) - f_3(0)}{\lambda} = 0, \quad \lim_{\lambda\to 0^-} \frac{f_3(\lambda) - f_3(0)}{\lambda} = 0.$$

Entonces únicamente f_3 es derivable en $\lambda = 0$. Por tanto f no es derivable en $\lambda = 0$.
Continuidad y diferenciabilidad en $\pi/2$:
Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{\lambda\to \pi/2^-} f_1(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda\to \pi/2^+} f_1(\lambda) = 0$$

$$\lim_{\lambda\to \pi/2^-} f_2(\lambda) = 1, \quad \lim_{\lambda\to \pi/2^-} f_2(\lambda) = 0$$

$$\lim_{\lambda\to \pi/2^-} f_3(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda\to \pi/2^+} f_3(\lambda) = 1.$$

Como f_2 y f_3 no son continuas en $\lambda = \pi/2$, f no es continua en $\lambda = \pi/2$.
Vamos a calcular las derivadas parciales de f, aunque sabemos que la función no va a ser diferenciable. Únicamente tenemos que

calcular las de f_1 pues como f_2 y f_3 no son continuas en $\pi/2$ no pueden ser diferenciables.

$$\lim_{\lambda \to \pi/2^+} \frac{f_1(\lambda) - f_1(\pi/2)}{\lambda - \pi/2} = 0,$$

$$\lim_{\lambda \to \pi/2^-} \frac{f_1(\lambda) - f_1(\pi/2)}{\lambda - \pi/2} = 0,$$

Entonces f_1 es derivable en $\lambda = \pi/2$.

Diferencial: Finalmente, calculemos la diferencial en los puntos en los que es posible, es decir, $\lambda \in (-\pi/2, \pi)$ y $\lambda \neq 0, \pi/2$.

$$Df(\lambda) = \begin{cases} (-\cos\lambda, 0, \sin\lambda) & \text{si } -\pi/2 < \lambda < 0, \\ (-\sin\lambda, \cos\lambda, 0) & \text{si } 0 < \lambda < \pi/2, \\ (0, -\cos\lambda, \sin\lambda) & \text{si } \pi/2 < \lambda < \pi. \end{cases}$$

Las derivadas parciales serán cada una de las funciones coordenadas de Df. Además f_1 es derivable en $\lambda = \pi/2$ y su derivada vale 0.

(c)

$$f(\lambda) = \begin{cases} (\cos\lambda, \sin\lambda, \lambda) & \text{si } 0 \leq \lambda < \pi/4, \\ (\cos\lambda, \sin\lambda, 0) & \text{si } -3\pi/4 \leq \lambda < 0, \\ (\cos\lambda, \sin\lambda, \lambda + 3\pi/4) & \text{si } -7\pi/4 < \lambda < -3\pi/4. \end{cases}$$

Solución:
La función f es una función vectorial, definida

$$f\colon (-7\pi/4, \pi/4) \to \mathbb{R}^3.$$

En el abierto $(0, \pi/4)$, la función f está definida como

$$f(\lambda) = (\cos\lambda, \sin\lambda, \lambda),$$

por tanto es continua y diferenciable en dicho abierto por ser composición de funciones continuas y diferenciables.
En el abierto $(-3\pi/4, 0)$, la función f está definida como

$$f(\lambda) = (\cos\lambda, \sin\lambda, 0),$$

por tanto es continua y diferenciable en dicho abierto por ser composición de funciones continuas y diferenciables.
En el abierto $(-7\pi/4, -3\pi/4)$, la función f está definida como

$$f(\lambda) = (\cos\lambda, \sin\lambda, \lambda + 3\pi/4),$$

por tanto es continua y diferenciable en dicho abierto por ser composición de funciones continuas y diferenciables.
Únicamente falta estudiar la continuidad y diferenciabilidad en $\lambda = 0$ y $\lambda = -3\pi/4$. Para esto, basta estudiar la continuidad y diferenciabilidad de sus funciones coordenadas en $\lambda = 0$. Es decir, si $f = (f_1, f_2, f_3)$, debemos estudiar f_1, f_2 y f_3, donde:

$$f_1(\lambda) = \cos\lambda, \quad -7\pi/4 < \lambda < \pi/4,$$

$$f_2(\lambda) = \sin\lambda, \quad -7\pi/4 < \lambda < \pi/4,$$

$$f_3(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \text{si } 0 \leq \lambda < \pi/4, \\ 0 & \text{si } -3\pi/4 \leq \lambda < 0, \\ \lambda + 3\pi/4 & \text{si } -7\pi/4 < \lambda < -3\pi/4. \end{cases}$$

Como f_1 y f_2 son continuas y diferenciables en todo punto, únicamente tenemos que estudiar f_3.

Continuidad y diferenciabilidad en 0:

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{\lambda \to 0^-} f_3(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \to 0^+} f_3(\lambda) = 0.$$

Como coinciden y f_3 es una función de una variable, f_3 es continua en $\lambda = 0$, luego f es continua en $\lambda = 0$ (yas que f_1 y f_2 son continuas).

Para calcular la diferenciabilidad, basta calcular las derivadas laterales y ver si coinciden. Calculemos dichas derivadas:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f_3(\lambda) - f_3(0)}{\lambda} = 1, \quad \lim_{\lambda \to 0^-} \frac{f_3(\lambda) - f_3(0)}{\lambda} = 0.$$

Entonces f_3 no es derivable en $\lambda = 0$. Por tanto f no es derivable en $\lambda = 0$.

Continuidad y diferenciabilidad en $-3\pi/4$:

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{\lambda \to -3\pi/4^-} f_3(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \to -3\pi/4^+} f_3(\lambda) = 0.$$

Como f_3 es continua en $\lambda = -3\pi/4$, f es continua en $\lambda = -3\pi/4$ (ya que f_1 y f_2 son continuas).

Vamos a calcular las derivadas parciales de f. Únicamente calcularemos las derivadas parciales de f_3 ya que las de f_1 y f_2 se obtienen derivando en su expresión.

$$\lim_{\lambda \to -3\pi/4^+} \frac{f_3(\lambda) - f_1(-3\pi/4)}{\lambda + 3\pi/4} = 1,$$

$$\lim_{\lambda \to -3\pi/4^-} \frac{f_3(\lambda) - f_1(-3\pi/4)}{\lambda + 3\pi/4} = 0,$$

Entonces f_3 no es derivable en $\lambda = -3\pi/4$. Luego f tampoco.

Diferencial: Finalmente, calculemos la diferencial en los puntos en los que es posible, es decir, $\lambda \in (-7\pi/4, \pi/4)$ y $\lambda \neq 0, -3\pi/4$.

$$Df(\lambda) = \begin{cases} (-\sin\lambda, \cos\lambda, 1) & \text{si } 0 \leq \lambda < \pi/4, \\ (-\sin\lambda, \cos\lambda, 0) & \text{si } -3\pi/4 \leq \lambda < 0, \\ (-\sin\lambda, \cos\lambda, 1) & \text{si } -7\pi/4 < \lambda < -3\pi/4. \end{cases}$$

Las derivadas parciales serán cada una de las funciones coordenadas de Df.

2 Estudia la continuidad, diferenciabilidad y existencia de derivadas parciales de las siguientes funciones. Calcula las derivadas parciales y la diferencial en los puntos que sea posible.

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x \geq 0, \\ x-y & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Solución:

La función f es una función escalar, definida

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

En el abierto $\{(x,y)\colon x>0\}$, la función f está definida como

$$f(x,y) = x+y,$$

por tanto es continua y diferenciable en dicho abierto por ser suma de funciones continuas y diferenciables.

En el abierto $\{(x,y)\colon x<0\}$, la función f está definida como

$$f(x,y) = x-y,$$

por tanto es continua y diferenciable en dicho abierto por ser suma de funciones continuas y diferenciables.

Únicamente tenemos que estudiar la continuidad y diferenciabilidad en $x=0$.

Continuidad.

Tomemos un punto cualquiera de $x=0$. Podemos escribir ese punto como $(0,a)$, $a \in \mathbb{R}$. En dicho punto, la función vale $f(0,a)=a$. Calculemos los límites direccionales en dicho punto y comprobemos si coinciden.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,a) = \lim_{x\to 0^+} x+a = a, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x,a) = \lim_{x\to 0^-} x-a = -a.$$

$$\lim_{y\to a} f(0,y) = \lim_{y\to a} y = a.$$

Si $a \neq 0$, el límite en la dirección de x no existe, luego f no es continua en $(0,a)$ para $a \neq 0$.

Sólo nos falta estudiar qué ocurre en el punto $(0,0)$. Podríamos calcular los límites direccionales y reiterados, pero todos van a valer 0 (comprobar). Entonces acudimos a la definición de continuidad para comprobar si f es continua en $(0,0)$. Tenemos que comprobar si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Vamos a probarlo de dos formas distintas. En primer lugar, como la función cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ está definida por dos funciones, si el límite de cada una de esas funciones es cero entonces el límite de f es cero y f es continua:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x+y = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x-y = 0.$$

Luego f es continua en $(0,0)$.

Otro modo de demostrarlo es a partir de la definición de límite. Dado $\epsilon > 0$, tenemos que probar que existe $\delta > 0$ de modo que si $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$, entonces $|f(x,y)-0| < \epsilon$.

Fijemos $\epsilon > 0$.

$$|f(x,y)-0| = |f(x,y)|$$

Tenemos dos posibilidades: si $x > 0$,

$$|f(x,y)| = |x+y| \leq |x| + |y| \leq \|(x,y)\| + \|(x,y)\| < 2\delta$$

y tomando $\delta < \epsilon/2$ tenemos

$$|f(x,y)-0| < \epsilon, \quad \text{si } \|(x,y)-(0,0)\| < \delta.$$

Análogamente, tomando $\delta < \epsilon/2$ tenemos que si $x < 0$,

$$|f(x,y)-0| < \epsilon, \quad \text{si } \|(x,y)-(0,0)\| < \delta.$$

Luego f es continua en $(0,0)$.

Diferenciabilidad.

Sólo tenemos que estudiar la diferenciabilidad en $(0,0)$ pues f no es continua en los demás puntos de $x=0$, luego no es diferenciable.

Calculamos las derivadas parciales en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$$

Como $f(x,0)$ depende de la región donde nos encontremos, tenemos que calcular los límites laterales.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = 1.$$

Entonces la derivada parcial de f en $(0,0)$ respecto a x existe y vale 1.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1.$$

Luego ambas parciales existen. Para comprobar si la función es diferenciable, debemos comprobar si el siguiente límite es 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

Es decir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ahora bien, si calculamos los direccionales $y = mx$ con $x < 0$, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-mx-x-mx}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2mx}{-x\sqrt{1+m^2}} = \frac{2m}{\sqrt{1+m^2}},$$

depende de m, luego el límite de f en $(0,0)$ no existe y f no es diferenciable en $(0,0)$.

Finalmente, en el conjunto de puntos en los que f es diferenciable, $x \neq 0$, la diferencial se calcula derivando la función f con las reglas usuales de derivación.

$$Df(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{si } x \geq 0, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Solución:

La función f es una función escalar, definida

$$f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}.$$

En el abierto $\{(x,y)\colon (x,y)\neq(0,0)\}$ (comprobar que es abierto), la función f está definida como

$$f(x,y)=\frac{|xy|}{x^2+y^2},$$

por tanto es continua en dicho abierto por ser suma de funciones continuas.

Para estudiar la diferenciabilidad, tenemos que eliminar el valor absoluto, pues no es una función diferenciable.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \text{ y } xy\geq 0,\\ \dfrac{-xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \text{ y } xy<0,\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Resolviendo la ecuación $xy=0$ obtenemos dos soluciones, $x=0$ o $y=0$. Entonces el plano queda dividido en cuatro regiones (los cuatro cuadrantes):

$$R_1=\{(x,y)\colon x>0,\ y>0\},$$

$$R_2=\{(x,y)\colon x<0,\ y>0\},$$

$$R_3=\{(x,y)\colon x<0,\ y<0\},$$

$$R_4=\{(x,y)\colon x>0,\ y<0\}.$$

Además $xy>0$ en R_1 y R_3 y $xy<0$ en R_2 y R_4.

En el abierto $\{(x,y)\colon xy>0\}$ (es decir, R_1 y R_3), la función f está definida como

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},$$

por tanto es diferenciable en dicho abierto por ser composición de funciones diferenciables.

En el abierto $\{(x,y)\colon xy<0\}$ (es decir, R_2 y R_4), la función f está definida como

$$f(x,y)=\frac{-xy}{x^2+y^2},$$

por tanto es diferenciable en dicho abierto por ser composición de funciones diferenciables.

Únicamente nos falta estudiar la continuidad en $(0,0)$ y la diferenciabilidad en $xy=0$.

Continuidad.

Calculamos en la dirección de las rectas $y=mx$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

Como dependen de m, f no es continua en $(0,0)$.

Diferenciabilidad.

Tenemos que estudiar la diferenciabilidad en $xy=0$. Resolviendo esa ecuación obtenemos $x=0$ o $y=0$, luego tenemos que estudiar la continuidad en esas rectas, exceptuando $(0,0)$ ya que no es diferenciable, pues no es continua.

Sea un punto de la recta $x=0$. Podemos escribirlo como $(0,a)$. Vamos a suponer que $a>0$. Calculamos las derivadas parciales. Comenzaremos con la derivada en la dirección de x. Como en esa dirección pasamos de la región R_1 a la R_2, debemos distinguir en qué dirección no acercamos:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x,a)-f(0,a)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{ax}{x^2+a^2}-0}{x}=\frac{1}{a}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x,a)-f(0,a)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{-ax}{x^2+a^2}-0}{x}=\frac{-1}{a}$$

Luego no existe la parcial de f respecto a x en $(0,a)$. Por tanto f no es diferenciable en $(0,a)$.

El resto de los casos son similares.

Finalmente, para obtener la diferencial de f en los puntos que existen, basta derivar la función en dichos puntos. En el caso de las parciales, habría que discutir si existen en los puntos de $xy=0$ y calcularlas como hemos hecho anteriormente.

(c)

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2+y^2} & \text{si } x^2+y^2\leq 1,\\ 0 & \text{si } x^2+y^2>1.\end{cases}$$

Solución:
La función f es una función escalar, definida

$$f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}.$$

Denotemos los conjuntos donde está definida la función como:

$$R_1=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leq 1\},\quad R_2=\{(x,y)\colon x^2+y^2>1\}.$$

En el abierto $\{(x,y)\colon x^2+y^2<1\}$ la función f está definida como

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2+y^2},$$

por tanto es continua y diferenciable en dicho abierto por ser composición de funciones continuas y diferenciables.
En el abierto $\{(x,y)\colon x^2+y^2>1\}$ la función f está definida como

$$f(x,y)=0,$$

por tanto es continua y diferenciable en dicho abierto por ser composición de funciones continuas y diferenciables.
Únicamente tenemos que estudiar la diferenciabilidad y la continuidad en

$$S=\{(x,y)\colon x^2+y^2=1\}.$$

Continuidad.
Sea $(a,b)\in S$. Estudiemos los límites laterales. Para ello tenemos que distinguir dos casos, según nos acerquemos por puntos de una región o de la otra.

$$\lim_{x\to a} f(x,b)=0,\quad si(x,b)\in R_1,$$

$$\lim_{x\to a} f(x,b)=0,\quad si(x,b)\in R_2,$$

$$\lim_{y\to b} f(a,y)=0,\quad si(a,y)\in R_1,$$

$$\lim_{y\to b} f(a,y)=0,\quad si(a,y)\in R_2.$$

Como todos coinciden con $f(a,b)$, deberíamos estudiar los límites en la dirección de rectas y reiterados. Comprobar que en todo caso dan 0.

Como todos los límites direccionales coinciden, acudimos a la definición de continuidad. Tenemos que comprobar que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0.$$

Ahora bien, tanto en la región R_1 como en la R_2, se verifica el límite anterior, luego f es continua en (a,b) para todo $(a,b) \in S$.

Diferenciabilidad.

Sea $(a,b) \in S$. Calculemos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b}.$$

Comencemos por la derivada respecto a x. Distinguimos dos casos, según $(x,b) \in R_1$ o $(x,b) \in R_2$. Si $(x,b) \in R_1$, aplicando L'Hôpital,

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{1-x^2-b^2} - 0}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-b^2}} = \infty.$$

Luego la derivada parcial de f respecto a x no existe cuando nos acercamos por la región R_1. Por tanto f no es diferenciable en (a,b) para todo $(a,b) \in S$.

(d)

$$f(x,y)=\begin{cases}1-\sqrt{x^2+y^2} & \text{si } xy\geq 0 \text{ y } x^2+y^2<1,\\ \sqrt{x^2+y^2}-1 & \text{si } xy<0 \text{ y } x^2+y^2<1.\end{cases}$$

Solución:
La función f es una función escalar, definida

$$f\colon D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},$$

donde D es el conjunto

$$D=\{(x,y)\colon x^2+y^2<1\}$$

Vamos a dividir D en regiones, según f esté definida por la primera o la segunda ecuación. Las soluciones de $xy=0$ son $x=0$ e $y=0$, luego estas rectas dividen a D en cuatro abiertos:

$$D_1=\{(x,y)\in D\colon x>0,\ y>0\},$$
$$D_2=\{(x,y)\in D\colon x<0,\ y>0\},$$
$$D_3=\{(x,y)\in D\colon x<0,\ y<0\},$$
$$D_4=\{(x,y)\in D\colon x>0,\ y<0\}.$$

En los abiertos D_1 y D_3, la función f está definida por

$$f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2},$$

por tanto es continua y diferenciable en dicho abierto por ser composición de funciones continuas y diferenciables (nótese que $\sqrt{x}$ es diferenciable para $x>0$, aunque no para $x=0$, pero este caso no se da en los abiertos anteriores).
En los abiertos D_2 y D_4, la función f está definida por

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-1,$$

por tanto es continua y diferenciable en dicho abierto por ser composición de funciones continuas y diferenciables.
Únicamente tenemos que estudiar la continuidad en $x=0$ e $y=0$.
Continuidad.
Comencemos por la continuidad en $x=0$. Sea $(0,a)$ un punto de dicha recta. Calculemos los límites direccionales en la dirección del eje x (comprobar que en la dirección del eje y coinciden y valen $f(0,x)$ pues siempre estamos es $xy\geq 0$). Tenemos que distinguir tres casos:

$a < 0$. En este caso, si $x > 0$ estamos en D_3 y si $x < 0$ en D_4. Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x,a) = 1 - a,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,a) = -a - 1.$$

Como son distintos, el límite no existe y f no es continua en $(0,a)$.

$a > 0$. Igual que en el caso anterior, obtenemos que f no es continua en $(0,a)$.

$a = 0$. Entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 1 - \sqrt{x^2} = 1 = f(0,0).$$

Si tomamos los límites direccionales en $(0,0)$ en la dirección de $y = mx$, $m < 0$ (para estar en las regiones D_2 o D_4, igual se haría para $m > 0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \sqrt{x^2 + m^2y^2} - 1 = -1 \neq f(0,0).$$

Por tanto no es continua en $(0,0)$.

El estudio en el eje $y = 0$ es análogo, obteniéndose que f no es continua en ningún punto de dicho eje.

Diferenciabilidad. En los puntos que faltaban por estudiar, hemos obtenido que f no es continua, luego no es diferenciable.

3. Estudia la continuidad, diferenciabilidad y existencia de derivadas parciales de las siguientes superficies. Calcula las derivadas parciales y la diferencial en los puntos que sea posible.

(a)

$$f(\alpha,\beta)=\begin{cases}(\cos\beta,\alpha,0) & \text{si } \alpha<0 \text{ y}\\ & -\pi/2<\beta<\pi/2,\\ (1-\cos\alpha\,\cos\beta,\sin\alpha,\cos\alpha\,\sin\beta) & \text{si } 0\le\alpha<\pi/2 \text{ y}\\ & -\pi/2<\beta<\pi/2.\end{cases}$$

Solución:

La función f está definida en el conjunto

$$\{(\alpha,\beta)\colon\, \alpha<0,\ -\pi/2<\beta<\pi/2\}.$$

En los abiertos

$$\{(\alpha,\beta)\colon\, \alpha<\pi/2,\ -\pi/2<\beta<\pi/2\},$$

$$\{(\alpha,\beta)\colon\, 0<\alpha<\pi/2,\ -\pi/2<\beta<\pi/2\},$$

la f está definida mediante una función continua. Luego es continua en esos abiertos.

Falta por estudiar los puntos del conjunto

$$R=\{(0,\beta)\colon\, -\pi/2<\beta<\pi/2\}.$$

Sea $(0,b)\in R$. Para ver si f es continua en dicho punto, acudimos a la definición de continuidad:

$$f(0,b)=(1-\cos b,0,\sin b)$$

$$\lim_{(\alpha,\beta)\to(0,b)} f(\alpha,\beta)=\begin{cases}(\cos b,0,0) & \text{si tomamos } \alpha<0,\\ (1-\cos b,0,\sin b) & \text{si tomamos } \alpha>0.\end{cases}$$

Para que ambos límites coincidan y coincidan con el valor de la función en el punto, se ha de verificar

$$(\cos b,0,0)=(1-\cos b,0,\sin b).$$

Entonces tendríamos $0=\sin b$, luego $b=0$, pero entones $\cos b=1\neq 1-\cos b=0$. Como para ningún b se cumple la igualdad anterior, f no es continua en ningún punto de R.

(b)

$$f(\alpha,\beta)=\begin{cases}(1-\cos\beta,\alpha,1-\sin\beta) & \text{si } \alpha<0 \text{ y} \\ & -\pi/2<\beta<\pi/2, \\ (1-\cos\alpha\,\cos\beta,\sin\alpha,1-\cos\alpha\,\sin\beta) & \text{si } 0\le\alpha<\pi/2 \text{ y} \\ & -\pi/2<\beta<\pi/2.\end{cases}$$

Solución

La función f está definida en el conjunto

$$\{(\alpha,\beta)\colon\, \alpha<0,\ -\pi/2<\beta<\pi/2\}.$$

En los abiertos

$$\{(\alpha,\beta)\colon\, \alpha<\pi/2,\ -\pi/2<\beta<\pi/2\},$$

$$\{(\alpha,\beta)\colon\, 0<\alpha<\pi/2,\ -\pi/2<\beta<\pi/2\},$$

la función f está definida mediante una función continua. Luego es continua en esos abiertos.

Falta por estudiar los puntos del conjunto

$$R=\{(0,\beta)\colon\, -\pi/2<\beta<\pi/2\}.$$

Sea $(0,b)\in R$. Para ver si f es continua en dicho punto, acudimos a la definición de continuidad:

$$f(0,b)=(1-\cos b,0,1-\sin b)$$

$$\lim_{(\alpha,\beta)\to(0,b)} f(\alpha,\beta)=\begin{cases}(1-\cos b,0,1-\sin b) & \text{si tomamos } \alpha<0, \\ (1-\cos b,0,1-\sin b) & \text{si tomamos } \alpha>0.\end{cases}$$

Como ambos límites coinciden la función es continua en todo punto de R.

Finalmente, estudiemos la diferenciabilidad. Para ello veremos que las parciales son continuas en un entorno de cada punto de R. Luego f es diferenciable en todo punto de R.

Calculemos las derivadas parciales:

Si $\alpha<0$,

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\sin\beta\\0\\-\cos\beta\end{pmatrix}$$

Si $\beta > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\beta \\ 0 \\ -\cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

Como las dos parciales son continuas en todo punto (comprobar), f es diferenciable en R.