Ejercicios Tema 1

1. Resolver el siguiente sistema utilizando eliminación gaussiana con pivote parcial y sin pivote. Redondear los números considerando sólo las dos primeras cifras.

$$\begin{cases} -0.01x_1 + x_2 + x_3 = & 1 \\ x_1 + 0.1x_2 + 0.9x_3 = & 1 \\ x_1 + x_2 + 0.9x_3 = & 0.9 \end{cases}$$

   Comparar las soluciones obtenidas con la solución exacta.

2. A partir de la eliminación gaussiana, obtener la factorización LU de las siguientes matrices:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

3. Probar que la siguiente matriz no puede factorizarse como producto LU, donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Factorizar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Como LU donde L es triangular inferior con unos en la diagonal y U es triangular superior.

   (b) Como LU donde L es triangular inferior y U es triangular superior con unos en la diagonal.

   (c) Como LL^t, donde L es triangular inferior.

5. Resolver mediante eliminación gaussiana con pivote los sistemas

$$a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

a) Matrix ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 2.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 1.0 & 0.0 & 4.0 & -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos la filas 2 y 1

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 1.0 & 2.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 4.0 & -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 1.
Fila 2$\leftarrow$ Fila 2 - Fila 1 * 0.5. Fila 3$\leftarrow$ Fila 3 - Fila 1 * 0.5. Fila 4$\leftarrow$ Fila 4 - Fila 1 * 0.0

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & -1.5 & 1.0 & -1.5 \\ 0.0 & 1.0 & 2.5 & -2.0 & -1.5 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos la filas 4 y 2

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 2.5 & -2.0 & -1.5 \\ 0.0 & 3.0 & -1.5 & 1.0 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 2
Fila 3$\leftarrow$ Fila 3 - Fila 2 * 0.333333333. Fila 4$\leftarrow$ Fila 4 - Fila 2 * 1.0

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.16666666667 & -2.33333333333 & -1.5 \\ 0.0 & 0.0 & -5.5 & 0.0 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos la filas 4 y 3

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -5.5 & 0.0 & -1.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.16666666667 & -2.33333333333 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 3
Fila 4 $\leftarrow$ Fila 4 - Fila 3 * -0.212121212121

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -5.5 & 0.0 & -1.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -2.33333333333 & -1.81818181818 \end{pmatrix}$$

Y ahora resolvemos

$$(0.467532467532, -0.623376623377, 0.272727272727, 0.779220779221)$$

6. Resolver los siguientes sistemas lineales utilizando eliminación gaussiana con y sin pivote:

$$a) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 100x_3 = 1 \\ x_1 - 10x_2 + 0.00001x_3 = 0 \\ 3x_1 - 100x_2 + 0.0001x_3 = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x_1 + 20x_2 - x_3 + 0.001x_4 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 20x_3 - 0.1x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 100x_3 - 10x_4 = 1 \\ 2x_2 - 100x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Sin pivote. Matrix ampliada:

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \\ 1.0 & -10.0 & 1 \times 10^{-05} & 0.0 \\ 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 1
Fila 2 ← Fila 2 - Fila 1 * 0.5. Fila 3 ← Fila 3 - Fila 1 * 1.5

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \\ 0.0 & -8.5 & -49.99999 & -0.5 \\ 0.0 & -95.5 & -149.9999 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 2
Fila 3 ← Fila 3 - Fila 2 * 11.2352941176

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \\ 0.0 & -8.5 & -49.99999 & -0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 411.764693529 & 4.11764705882 \end{pmatrix}$$

Y ahora resolvemos

$$\left(2.56564124327 \times 10^{-17}, 1.00000003029 \times 10^{-08}, 0.0100000003\right)$$

a) Con pivote. Matrix ampliada:

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \\ 1.0 & -10.0 & 1 \times 10^{-05} & 0.0 \\ 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos la filas 3 y 1

$$\begin{pmatrix} 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \\ 1.0 & -10.0 & 1 \times 10^{-05} & 0.0 \\ 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 1
Fila 2 ← Fila 2 - Fila 1 * 0.333333333333 Fila 3 ← Fila 3 - Fila 1 * 0.666666666667

$$\begin{pmatrix} 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \\ 0.0 & 23.3333333333 & -2.33333333333 \times 10^{-05} & 0.0 \\ 0.0 & 63.6666666667 & 99.9999333333 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos la filas 3 y 2

$$\begin{pmatrix} 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \\ 0.0 & 63.6666666667 & 99.9999333333 & 1.0 \\ 0.0 & 23.3333333333 & -2.33333333333 \times 10^{-05} & 0.0 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 2
Fila 3 $\leftarrow$ Fila 3 - Fila 2 * 0.366492146597

$$\begin{pmatrix} 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \\ 0.0 & 63.6666666667 & 99.9999333333 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -36.6492135602 & -0.366492146597 \end{pmatrix}$$

Y ahora resolvemos

$$(0.0,\ 1.00000003 \times 10^{-08},\ 0.0100000003)$$

7. Resolver mediante descomposición LU los sistemas

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

8. Aplicar tres pasos del método de Jacobi a los sistemas (partiendo de (0,0,0,0)). Calcular el error residual.

$$a) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

a) $(0.3, -0.48, 0.0, 0.0)$.

9. Aplicar 2 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $3x^3 - 2x^2 - 0.1$ en el intervalo $[0, 1]$.

$x \approx 0.625$.

10. Aplicar 3 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $\sin(x)$ en el intervalo $[3, 3.5]$.

$x \approx 3.15625000000000$.

11. Aplicar 3 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $\cos(x)$ en el intervalo $[-2, -1.5]$.

$x \approx -1.59375000000000$.

12. Aplicar 2 paso del método de la bisección para aproximar un cero de $x^2 - 3x + 2$ en el intervalo $[0, 3]$.

En principio no podríamos aplicar el método. Podemos obtener 0.75 o 2.25.

13. Aplicar 2 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $x^2 - 2x + 1$ en el intervalo $[0, 2]$.

No podemos aplicar el método.

14. Aplicar 2 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $2 - x - e^x$ en el intervalo $[0, 1]$. Acotar el error cometido.

Solución aproximada: 0.375000000000000.
Cota del error: 0.125000000000000

15. Aplicar 4 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $e^x + 3x$ en el intervalo $[-1, 0]$. Acotar el error cometido.

Solución aproximada: -0.375000000000000.
Cota del error: 0.125000000000000

16. Probar que la ecuación $e^x + 2x = 0$ tiene una única raíz. Acotar dicha raíz mediante el método de la bisección con un error menor de 10^{-2}.

Tiene como mucho una raíz porque la función $f(x) = e^x + 2x$ es creciente. Tiene una porque $f(-2) < 0 < f(0)$.
Aproximación: -0.355468750000000

17. Probar que la función $f(x) = \cos x - 2x$ tiene un único cero. Acotarlo mediante el método de la bisección con un error menor de 10^{-2}.

Tiene como mucho una raíz porque la función es decreciente. Tiene una porque $f(1) < 0 < f(0)$.
Aproximación: 0.445312500000000

18. Utilizar el método de la bisección para encontrar una solución aproximada con un error menor que 10^{-2} en el intervalo $[4, 4.5]$ para la ecuación $x = \tan(x)$.

Aproximación: 4.49609375000000

19. Sabiendo que existe una raíz de la ecuación $x^3 + x = 6$ entre 1.55 y 1.75, ¿cuántas iteraciones son necesarias hasta obtener mediante el método de bisección un intervalo de amplitud menor o igual que 10^{-3} que contenga la raíz? Calcular todas las iteraciones necesarias.

Aproximación: 1.63359375000000. 7 iteraciones.

20. Aplicar el método de bisección a $f(x) = x^3 - 16 = 0$, a fin de determinar la raíz cúbica de 16 con un error menor que 0.125.

   Aproximación: (tomando el intervalo [2,3]) 2.56250000000000.

21. Aplicar el método de bisección a $f(x) = x^3 - 6 = 0$, a fin de determinar la raíz cúbica de 6 con un error menor que 0.125.

   Aproximación: (tomando el intervalo [1,2]) 1.82812500000000.

22. Aplicar el método de la bisección para obtener una solución de la ecuación $\cos x - \sin 2x = x$ (entre 0 y 1) con un error menor de 10^{-2}. ¿Cuántos pasos serían necesarios para que el error fuese menor que 10^{-5}?

   Aproximación: 0.332031250000000.
   Con error menor que 10^{-5}, 17 pasos.

23. Aplicar cinco pasos del método de Newton-Raphson para encontrar un cero de $f(x) = x - e^{-x}$ partiendo de $x_0 = 1$. Acotar el error cometido suponiendo que la raíz y las iteraciones del método están en el intervalo $[0.5, 1]$.

   Aproximación: 0.567143290409784

24. Aplicar tres pasos del método de Newton-Raphson para encontrar una solución de $x = 3\sin(x)$ partiendo de $x_0 = 1$.

   Aproximación: -2.14043082397693

25. Aplicar cuatro pasos del método de Newton-Raphson para encontrar una raíz cúbica de 50 partiendo de $x_0 = 4$. Acotar el error cometido suponiendo que la raíz y las iteraciones del método están en el intervalo $[3, 4]$.

   Aproximación: 3.68403149864039

26. Una aplicación de los métodos de cálculo de raíces es obtener los máximos y mínimos de una función, pues se corresponden con los ceros de la derivada. Calcular mediante 4 iteraciones del método de Newton-Raphson partiendo de $x_0 = -0.5$ la posición del mínimo de $f(x) = e^x + x^2/2$.

   Aproximación: -0.567143290409784

27. Aplicar el método de Newton-Raphson para calcular un cero de la función coseno partiendo de $x_0 = 1.5$, con un error menor que 10^{-3}.

   Aproximación: 1.57079632679434

28. Aplicar cuatro pasos del método de Newton-Raphson para calcular aproximadamente la raíz de $x^2 - 3x + 2$, partiendo de:

   - $x_0 = 0$
   - $x_0 = 1.5$
   - $x_0 = 3$.

   - 0.999984740978103
   - No se puede
   - 2.00001525902190

29. Aplicar tres pasos del método de la secante para encontrar un cero de $f(x) = x - e^{-x}$ partiendo de $x_0 = 1$ y $x_1 = 0$.

   Aproximación: 0.567102080171874

30. Aplicar tres pasos del método de la secante para encontrar una solución de $x = \sin(x)$ partiendo de $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$

   Aproximación: 0.508802044989435

31. Obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas:

   (a)

x	-1	0	1
y	0	3	0

   (b)

x	0	1	2
y	-2	0	2

   (c)

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

   (a) $-3.0x^2 + 0.0x + 3.0$
   (b) $2.0x - 2.0$
   (c) $-0.5x^3 + 1.5x^2 + x - 2.0$

32. Utilizando los polinomios de Lagrange, obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas:

   (a)

x	-1	0	1
y	0	3	0

   (b)

x	0	1	2
y	-2	0	2

   (c)

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

   (a) $-3\,(x+1)(x-1)$
   (b) $-(x-1)(x-2) + (x-1)x$
   (c) $\frac{1}{6}\,(x-1)(x-2)x - (x+1)(x-1)(x-2) + \frac{1}{3}\,(x+1)(x-1)x$

33. Obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas mediante el método de Newton:

(a)

x	-1	0	1
y	0	3	0

(b)

x	0	1	2
y	-2	0	2

(c)

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

(a) $0 + 3(x + 1) - 3\,(x + 1)x$

(b) $-2 + 2\,x$

(c) $-1 - (x + 1) + \frac{3}{2}\,(x + 1)x - \frac{1}{2}\,(x + 1)(x - 1)x$

34. Obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas:

(a)

x	-1	0	1
y	0	3	0
y'	1	0	2

(b)

x	0	1	2
y	-2	0	2
y'	0	3	0

(c)

x	-1	0	1	2
y	2	0	0	2
y'	0	1	1	0

35. Obtener los splines cúbicos naturales que interpolan las siguientes tablas:

(a)

x	-1	0	1
y	0	3	0

(b)

x	0	1	2
y	-2	0	2

(c)

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

(a)

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}\,x^3 - \frac{9}{2}\,x^2 + 3 & \text{en } (-1,0) \\ \frac{3}{2}\,x^3 - \frac{9}{2}\,x^2 + 3 & \text{en } (0,1) \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2\,x - 2 & \text{en } (0,1) \\ 2\,x - 2 & \text{en } (1,2) \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \frac{4}{5}\,x^3 + \frac{12}{5}\,x^2 + \frac{3}{5}\,x - 2 & \text{en } (-1,0) \\ -x^3 + \frac{12}{5}\,x^2 + \frac{3}{5}\,x - 2 & \text{en } (0,1) \\ \frac{1}{5}\,x^3 - \frac{6}{5}\,x^2 + \frac{21}{5}\,x - \frac{16}{5} & \text{en } (1,2) \end{cases}$$

36. Calcular mediante el método del trapecio simple una aproximación de las siguientes integrales:

(a) $\int_0^1 (1 + x^3)^{1/2}\,dx$

(b) $\int_1^2 (1 + x^4)^{-1}\,dx$

(c) $\int_0^2 (1 + x^3)^{-1/2}\,dx$

(d) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$

(e) $\int_0^1 xe^x\,dx$

(f) $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

(a) 1.20710678118655

(b) 0.279411764705882

(c) 1.33333333333333

(d) 0.785398163397448

(e) 1.35914091422952

(f) 55.5981500331442

37. Calcular mediante el método de Simpson una aproximación de las siguientes integrales:

(a) $\int_0^1 (1+x^3)^{1/2}\,dx$ (c) $\int_0^2 (1+x^3)^{-1/2}\,dx$ (e) $\int_0^1 xe^x\,dx$

(b) $\int_1^2 (1+x^4)^{-1}\,dx$ (d) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$ (f) $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

(a) 1.10947570824873 (c) 1.38725348602651 (e) 1.00262072830988

(b) 0.203102890640792 (d) 1.00227987749221 (f) 22.1570924489935

38. Calcular mediante el método del trapecio compuesto con tres intervalos una aproximación de las siguientes integrales:

(a) $\int_0^1 (1+x^3)^{1/2}\,dx$ (c) $\int_0^2 (1+x^3)^{-1/2}\,dx$ (e) $\int_0^1 xe^x\,dx$

(b) $\int_1^2 (1+x^4)^{-1}\,dx$ (d) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$ (f) $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

(a) 1.12133567357593 (c) 1.39312100781485 (e) 1.04094480554267

(b) 0.211499575326302 (d) 0.977048616656853 (f) 23.5169280698955

39. Calcular el número de intervalos necesarios para, aplicando la fórmula de los trapecios compuesta o la de Simpson compuesta, obtener una aproximación de las siguientes integrales con error menor de 10^{-1}:

(a) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$ (c) $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

(b) $\int_0^1 xe^x\,dx$ (d) $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$

(a) Trapecio: 2 intervalos. Simpson: 2 intervalos.

(c) Trapecio: 6 intervalos. Simpson: 2 intervalos.

(b) Trapecio: 57 intervalos. Simpson: 12 intervalos.

(d) Trapecio: 3 intervalos. Simpson: 2 intervalos.

40. Calcular mediante cuadratura adaptativa una aproximación con error estimado menor de 10^{-1} de las siguientes integrales:

(a) $\int_0^1 (1+x^3)^{1/2}\,dx$

(b) $\int_1^2 (1+x^4)^{-1}\,dx$

(c) $\int_0^2 (1+x^3)^{-1/2}\,dx$

(d) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$

(e) $\int_0^1 xe^x\,dx$

(f) $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$