

Parcial de Cálculo Numérico

Cálculo Numérico y Estadística. Curso 2024-2025.

1. Utilizando los polinomios de Lagrange, obtener el polinomio interpolador de la siguiente tabla:

x	0	1	2
y	-2	0	2

Calcular su valor (el valor de interpolación) en $x = 1/2$.

(1,5 puntos)

2. Obtener mediante dos pasos del método de Euler el valor en $t = 2$ de la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$x'(t) = t - x(t), \quad x(1) = 4.$$

(1,5 puntos)

3. Consideremos la función:

$$s(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 + x + 1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ -x^3 + x^2 + x + 1 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

¿Es el spline cúbico natural que en $x=-1,0,1$ vale $2,1,2$? Justificar la respuesta.

(2 puntos)

4. Aproxima la integral $\int_{-2}^0 f(x) dx$, $f(x) = -e^{(x+1)}$, por cuadratura adaptativa con error estimado menor que 0.01 .¹

(2 puntos)

5. Aproximar el cero de la función $f(x) = 2 \sin(x) - x$ partiendo del valor $x_0 = 1.6$ mediante dos pasos del método de Newton-Raphson. Considerando que todos los puntos del método están en el intervalo $[1.6, 2]^2$, acotar el error cometido.

(1,5 puntos)

6. Aproximar la posición x de un extremo (máximo o mínimo - en este caso es un mínimo) de la función $f(x) = e^{-x} + \frac{x^2}{8}$ aplicando dos pasos del método de bisección en el intervalo $[1, 2]$.

(1,5 puntos)

¹Las integrales aproximadas por el método de Simpson son:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 f(x) dx &\approx -2.3621, & \int_{-2}^{-1} f(x) dx &\approx -0.6323, & \int_{-1}^0 f(x) dx &\approx -1.7189 \\ \int_{-2}^{-1.5} f(x) dx &\approx -0.2387, & \int_{-1.5}^{-1} f(x) dx &\approx -0.3936, \\ \int_{-1}^{-0.5} f(x) dx &\approx -0.6489, & \int_{-0.5}^0 f(x) dx &\approx -1.0698. \end{aligned}$$

²Se puede usar que las funciones seno y coseno son decrecientes en el intervalo $[1.6, 2]$, el coseno es negativo y el seno positivo.

Soluciones:

1. El polinomio de Lagrange para la tabla proporcionada es:

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

donde:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}, \quad L_1(x) = -x(x-2), \quad L_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

Sustituyendo los valores de y_i :

$$P(x) = -2 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2} + 0 \cdot (-x(x-2)) + 2 \cdot \frac{x(x-1)}{2}$$

Simplificando (no es necesario):

$$P(x) = -(x-1)(x-2) + x(x-1)$$

$$P(x) = -x^2 + 3x - 2 + x^2 - x$$

$$P(x) = 2x - 2$$

Evaluando en $x = 0.5$:

$$P(0.5) = 2(0.5) - 2 = 1 - 2 = -1$$

El valor de interpolación en $x = 0.5$ es: $\boxed{-1}$

2. El método de Euler para aproximar la solución a la EDO $x'(t) = t - x(t)$, $x(1) = 4$ en el punto $t = 2$ con un paso $h = 0.5$ se puede escribir en los siguientes pasos:

Paso 1:

$$t_0 = 1, \quad x_0 = 4$$

Calcular x_1 :

$$x_1 = x_0 + h \cdot f(t_0, x_0) = 4 + 0.5 \cdot (1 - 4) = 4 + 0.5 \cdot (-3) = 4 - 1.5 = 2.5$$

Paso 2:

$$t_1 = 1.5, \quad x_1 = 2.5$$

Calcular x_2 :

$$x_2 = x_1 + h \cdot f(t_1, x_1) = 2.5 + 0.5 \cdot (1.5 - 2.5) = 2.5 + 0.5 \cdot (-1) = 2.5 - 0.5 = 2$$

Por lo tanto, el valor en $t = 2$ de la solución es: $\boxed{2}$

3. Para comprobar si la función es un spline, tenemos que estudiar si cumple las condiciones. Denominaremos p_1 al polinomio que define el spline en $[-1, 0]$ y p_2 al que define el spline en $[0, 1]$ (son el mismo en este caso). En primer lugar, hay que ver que interpola, es decir, que $s(-1) = 2$, $s(0) = 1$ y que $s(1) = 2$. Para ello calculamos el valor de los dos polinomios en los extremos. Es decir,

$$p_1(-1) = 2, \quad p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 1, \quad p_2(1) = 2.$$

Basta sustituir para comprobar que lo cumple.

A continuación vamos a comprobar que el spline es dos veces derivable. Para ello, tenemos que comprobar que las derivadas primera y segunda de p_1, p_2 coinciden en $x = 0$. Pero esto es inmediato porque son el mismo polinomio.

Finalmente, veamos que cumple las condiciones de natural, es decir, que la derivada segunda en los extremos vale 0, $s''(-1) = s''(1) = 0$. Sustituyendo, es fácil comprobar que $p_1''(-1) \neq 0$, por lo que no es el spline natural (tampoco la cumple en el otro extremo, $p_2''(1) \neq 0$).

4. Consideramos la función $f(x) = -e^{x+1}$ y queremos calcular su integral definida en el intervalo $[-2, 0]$ utilizando la cuadratura adaptativa de Simpson.

(a) Paso 1: Dividimos el intervalo $[-2, 0]$ en dos subintervalos más pequeños:

$$[-2, -1] \quad \text{y} \quad [-1, 0]$$

(b) Usamos los valores aproximados dados:

$$S(f, -2, -1) = -0.6323$$

$$S(f, -1, 0) = -1.7189$$

$$S(f, -2, 0) = -2.3621$$

(c) El error en la cuadratura adaptativa está dado por:

$$E_1 = \frac{S(f, a, c) + S(f, c, b) - S(f, a, b)}{15}.$$

Por lo tanto, la fórmula se convierte en:

$$E_1 = \frac{S(f, -2, -1) + S(f, -1, 0) - S(f, -2, 0)}{15}$$

$$E_1 = \frac{-0.6323 + -1.7189 - (-2.3621)}{15}$$

$$E_1 = \frac{0.0109}{15}$$

$$E_1 \approx 0.000727$$

(d) El resultado final de cuadratura adaptativa se calcula mediante la fórmula:

$$S(f, a, c) + S(f, c, b) + E_1$$

$$S(f, -2, -1) + S(f, -1, 0) + E_1$$

$$= -0.6323 + (-1.7189) + 0.000727$$

$$= -2.3505$$

(e) Resultado final -2.3505

5. Consideremos la función $f(x) = 2 \sin(x) - x$ y queremos encontrar su cero partiendo del valor inicial $x_0 = 1.6$. Usaremos el método de Newton-Raphson para aproximar este cero y luego acotaremos el error cometido.

El método de Newton-Raphson se basa en la fórmula iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En este caso, tenemos

$$f(x) = 2 \sin(x) - x$$

$$f'(x) = 2 \cos(x) - 1$$

Primer paso:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\x_1 &= 1.6 - \frac{2 \sin(1.6) - 1.6}{2 \cos(1.6) - 1} \\x_1 &\approx 1.977\end{aligned}$$

Segundo paso:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\x_2 &= 1.977 - \frac{2 \sin(1.977) - 1.977}{2 \cos(1.977) - 1} \\x_2 &\approx 1.899\end{aligned}$$

La aproximación del cero de la función después de dos pasos es aproximadamente $x \approx 1.899$.

Acotemos ahora el error. Primero, calculamos las derivadas de la función $f(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2 \cos(x) - 1 \\f''(x) &= -2 \sin(x)\end{aligned}$$

El error cometido en cada iteración se puede acotar utilizando la fórmula:

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2$$

donde $M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ y $m = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Para el intervalo $[1.6, 2]$, calculamos:

$$\begin{aligned}M &= \max_{x \in [1.6, 2]} |-2 \sin(x)| = 2 \\m &= \min_{x \in [1.6, 2]} |2 \cos(x) - 1| \approx 1.058\end{aligned}$$

Ahora, podemos acotar el error cometido en la segunda iteración ($n = 2$):

$$|\bar{x} - x_2| \leq \frac{M}{2m} |x_2 - x_1|^2$$

Sustituyendo los valores de M y m , y de x_1, x_2 :

$$|\bar{x} - x_2| \leq \frac{2}{2 \cdot 1.058} |1.899 - 1.977|^2 = 0.006$$

6. Para calcular un extremo, tenemos que calcular un cero de la derivada, así que consideramos la función $g(x) = f'(x) = -e^{-x} + x/4$.

Evaluamos la función en los extremos del intervalo $[1, 2]$:

$$\begin{aligned}f(1) &= -e^{-1} + \frac{1}{4} = -0.3679 + 0.25 = -0.1179 \\f(2) &= -e^{-2} + \frac{2}{4} = -0.1353 + 0.5 = 0.3647\end{aligned}$$

Como $f(1)$ y $f(2)$ tienen signos distintos, sabemos que existe una raíz en el intervalo $[1, 2]$.

Aplicamos el método de bisección:

1. Calculamos la mitad del intervalo:

$$c = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

2. Evaluamos la función en xc :

$$f(1.5) = -e^{-1.5} + \frac{1.5}{4} = -0.2231 + 0.375 = 0.1519$$

Como $f(1)$ y $f(1.5)$ tienen signos distintos, sabemos que existe una raíz en el intervalo $[1, 1.5]$.

Aplicamos nuevamente el método de bisección:

1. Calculamos la mitad del nuevo intervalo:

$$c = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$$

2. Evaluamos la función en c :

$$f(1.25) = -e^{-1.25} + \frac{1.25}{4} = -0.2865 + 0.3125 = 0.026$$

Como $f(1)$ y $f(1.25)$ tienen signos distintos, sabemos que existe una raíz en el intervalo $[1, 1.25]$.

Aplicamos nuevamente el método de bisección:

1. Calculamos la mitad del nuevo intervalo:

$$c = \frac{1+1.25}{2} = 1.125$$

2. Evaluamos la función en c :

$$f(1.125) = -e^{-1.125} + \frac{1.125}{4} = -0.3246 + 0.28125 = -0.0434$$

Como $f(1.125)$ y $f(1.25)$ tienen signos distintos, sabemos que existe una raíz en el intervalo $[1.125, 1.25]$.

Después de aplicar el método de bisección tres veces, sabemos que el mínimo se alcanza para un valor de x en el intervalo $[1.125, 1.25]$.

Resolución de ecuaciones

- Newton-Raphson: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$,

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2, \quad M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|, \quad m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

- Fórmula de extrapolación de Aitken: $c - x_n \approx \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(x_n - x_{n-1})$,
 $\lambda_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}.$

Interpolación y aproximación

- Error de interpolación: $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

- Lagrange: $L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$

- Diferencias divididas:

$$f[x_k] = f(x_k), f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_j] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i},$$

$$f[x_k, \overset{m}{\cdot}, x_k] = \frac{f^{(m-1)}(x_k)}{(m-1)!}.$$

Derivación e integración

- Derivadas:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}.$$

- Trapecio: $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$ Error: $E = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi).$

- Simpson: $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(x_1) + f(b)).$ Error: $E = -\frac{(b-a)^5}{720}f^{(4)}(\xi).$

- Error métodos compuestos:

$$\text{Trapecio: } -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2, \quad \text{Simpson: } -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}h^4(b-a).$$

- Cuadratura adaptativa: $E_1 = (S(f, a, c) + S(f, c, b) - S(f, a, b))/15.$

- Euler: $x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k).$

- Euler modificado: $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}(f(t_k, x_k) + f(t_k + h, x_k + hf(t_k, x_k)))$

- Runge-Kutta: $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(f_{k_1} + 2f_{k_2} + 2f_{k_3} + f_{k_4}),$

$$\begin{aligned} f_{k_1} &= f(t_k, x_k), & f_{k_2} &= f(t_k + h/2, x_k + hf_{k_1}/2), \\ f_{k_3} &= f(t_k + h/2, x_k + hf_{k_2}/2), & f_{k_4} &= f(t_k + h, x_k + hf_{k_3}) \end{aligned}$$