

Parcial de Cálculo Numérico

Cálculo Numérico y Estadística. Curso 2025-2026.

1. Aplicar el mínimo número de pasos necesarios del método de la bisección para aproximar una solución de $x^5 - x^4 + 1 = 0$ con un error menor que 0.15, partiendo del intervalo $[-1, -0.6]$.

(1,5 puntos)

2. Obtener el polinomio interpolador de Hermite, usando diferencias divididas (Newton), de la siguiente tabla:

x	y	y'
-1	0	3
1	1	

(1,5 puntos)

3. Aproximar mediante dos pasos del método de Euler, el valor en $t = 2$, es decir, $x(2)$, de la solución del problema de valor inicial

$$x'(t) = t + x(t), \quad x(1) = -1.$$

(1,5 puntos)

4. Calcular mediante el método de Simpson compuesto¹ con cuatro intervalos una aproximación de $\int_0^1 \sin(x) dx$. Sin obtener una primitiva, acotar el error cometido.

(2 puntos)

5. Se sabe que la función $f(x) = e^x + x^2/2$ tiene un único extremo, que es un mínimo. Aproximar su valor aplicando dos pasos del método de Newton-Raphson a una función adecuada partiendo de $x_0 = -0.5$. ¿Cuál es el valor aproximado de ese mínimo?

(1.5 puntos)

6. Se han medido los valores de una magnitud y correspondiente a diferentes valores de x obteniendo los siguientes datos:

x	y
0	0.5
1	1
2	0.6

- (a) Determinar la función a minimizar para ajustar el modelo $y = \cos(ax + b)$ a estos datos utilizando el método de mínimos cuadrados.
- (b) **Proponer** un método para calcular los valores a y b (no es necesario calcular los valores). Detalla todo lo posible cómo se aplicaría.

(2 puntos)

¹ $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=0}^{k-1} f(x_{2i+1}) + f(x_n) \right).$

Resolución de ecuaciones

- Newton-Raphson: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$,

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2, \quad M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|, \quad m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

- Fórmula de extrapolación de Aitken: $c - x_n \approx \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(x_n - x_{n-1})$,
 $\lambda_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}.$

Interpolación y aproximación

- Error de interpolación: $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

- Lagrange: $L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$

- Diferencias divididas:

$$f[x_k] = f(x_k), f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_j] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i},$$

$$f[x_k, \overset{m}{\cdot}, x_k] = \frac{f^{(m-1)}(x_k)}{(m-1)!}.$$

Integración

- Derivadas:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}.$$

- Trapecio: $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$ Error: $E = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi).$

- Simpson: $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(x_1) + f(b)).$ Error: $E = -\frac{(b-a)^5}{720}f^{(4)}(\xi).$

- Error métodos compuestos:

$$\text{Trapecio: } -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2, \quad \text{Simpson: } -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}h^4(b-a).$$

- Cuadratura adaptativa: $E_1 = (S(f, a, c) + S(f, c, b) - S(f, a, b))/15.$

- Euler: $x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k).$

- Euler modificado: $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}(f(t_k, x_k) + f(t_k + h, x_k + hf(t_k, x_k)))$

- Runge-Kutta: $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(f_{k_1} + 2f_{k_2} + 2f_{k_3} + f_{k_4}),$

$$\begin{aligned} f_{k_1} &= f(t_k, x_k), & f_{k_2} &= f(t_k + h/2, x_k + hf_{k_1}/2), \\ f_{k_3} &= f(t_k + h/2, x_k + hf_{k_2}/2), & f_{k_4} &= f(t_k + h, x_k + hf_{k_3}) \end{aligned}$$

Solución orientativa del ejercicio 1

Queremos aproximar una raíz de

$$f(x) = x^5 - x^4 + 1$$

en el intervalo inicial $[a_0, b_0] = [-1, -0.6]$ mediante bisección, con error menor que 0.15.

1. Comprobación de cambio de signo:

$$f(-1) = -1 - 1 + 1 = -1 < 0, \quad f(-0.6) = (-0.6)^5 - (-0.6)^4 + 1 = 0.79264 > 0.$$

Como $f(a_0)f(b_0) < 0$, existe al menos una raíz en $[-1, -0.6]$.

2. Número mínimo de pasos:

En el método de bisección, tras n pasos el error del aproximante c_n cumple

$$|x^* - c_n| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Aquí $b_0 - a_0 = 0.4$, así que pedimos

$$\frac{0.4}{2^n} < 0.15 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^n > \frac{8}{3}.$$

Por tanto, el mínimo es $n = 2$ pasos.

3. Paso 1:

$$c_1 = \frac{-1 + (-0.6)}{2} = -0.8, \quad f(-0.8) = (-0.8)^5 - (-0.8)^4 + 1 = 0.26272 > 0.$$

Como $f(-1) < 0$ y $f(-0.8) > 0$, el nuevo intervalo es

$$[a_1, b_1] = [-1, -0.8].$$

4. Paso 2:

$$c_2 = \frac{-1 + (-0.8)}{2} = -0.9, \quad f(-0.9) = (-0.9)^5 - (-0.9)^4 + 1 = -0.24659 < 0.$$

Como $f(-0.9) < 0$ y $f(-0.8) > 0$, el intervalo queda

$$[a_2, b_2] = [-0.9, -0.8].$$

Conclusión: con el mínimo número de pasos (2), una aproximación es

$$x \approx c_2 = -0.9,$$

y su error queda acotado por

$$|x^* - c_2| \leq \frac{0.4}{2^2} = 0.1 < 0.15.$$

Solución orientativa del ejercicio 2

Queremos construir el polinomio interpolador de Hermite (forma de Newton) para la tabla

x	y	y'
-1	0	3
1	1	

Como en $x = -1$ conocemos también la derivada, repetimos ese nodo:

$$z_0 = -1, \quad z_1 = -1, \quad z_2 = 1.$$

Tabla de diferencias divididas (nodos repetidos):

$\tilde{x}$	$f[\]$	$f[\ , \]$	$f[\ , \ , \]$
-1	0		
-1	0	$f'(-1) = 3$	
1	1	$f[-1, 1] = \frac{1}{2}$	$f[-1, -1, 1] = -\frac{5}{4}$

De la tabla se obtiene:

$$f[z_0] = 0, \quad f[z_0, z_1] = 3, \quad f[z_0, z_1, z_2] = -\frac{5}{4}.$$

Polinomio de Newton-Hermite:

$$H(x) = f[z_0] + f[z_0, z_1](x - z_0) + f[z_0, z_1, z_2](x - z_0)(x - z_1).$$

Sustituyendo $z_0 = z_1 = -1$:

$$H(x) = 0 + 3(x + 1) - \frac{5}{4}(x + 1)^2.$$

Resultado (forma de Newton):

$$H(x) = 3(x + 1) - \frac{5}{4}(x + 1)^2$$

Comprobación rápida:

$$H(-1) = 0, \quad H'(-1) = 3, \quad H(1) = 1.$$

Solución orientativa del ejercicio 3

Queremos aproximar $x(2)$ para el problema de valor inicial

$$x'(t) = t + x(t), \quad x(1) = -1,$$

mediante **dos pasos** del método de Euler.

Paso 1: tamaño de paso

$$h = \frac{2-1}{2} = 0.5.$$

Nodos: $t_0 = 1$, $t_1 = 1.5$, $t_2 = 2$.

Paso 2: fórmula de Euler

$$x_{k+1} = x_k + h f(t_k, x_k), \quad f(t, x) = t + x.$$

Datos iniciales

$$x_0 = x(1) = -1.$$

- Primera iteración ($k = 0$):

$$f(t_0, x_0) = f(1, -1) = 1 + (-1) = 0,$$

$$x_1 = x_0 + h f(t_0, x_0) = -1 + 0.5 \cdot 0 = -1.$$

- Segunda iteración ($k = 1$):

$$f(t_1, x_1) = f(1.5, -1) = 1.5 - 1 = 0.5,$$

$$x_2 = x_1 + h f(t_1, x_1) = -1 + 0.5 \cdot 0.5 = -0.75.$$

Conclusión:

$x(2) \approx x_2 = -0.75.$

Solución orientativa del ejercicio 4

Queremos aproximar

$$I = \int_0^1 \sin(x) dx$$

mediante Simpson compuesto con 4 intervalos, y acotar el error sin usar primitivas.

Paso 1: partición

$$n = 4, \quad h = \frac{1 - 0}{4} = 0.25.$$

Nodos:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.25, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 0.75, \quad x_4 = 1.$$

Paso 2: fórmula de Simpson compuesto

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + f(x_4) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2)).$$

Con $f(x) = \sin(x)$:

$$I \approx \frac{0.25}{3} (\sin(0) + \sin(1) + 4(\sin(0.25) + \sin(0.75)) + 2\sin(0.5)).$$

Numéricamente:

$$I \approx 0.4597077449.$$

Paso 3: cota del error

Para Simpson compuesto,

$$|E_S| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Aquí $f^{(4)}(x) = \sin(x)$ y en $[0, 1]$ se cumple $|\sin(x)| \leq 1$, luego

$$|E_S| \leq \frac{1}{180} (0.25)^4 = 2.170138889 \times 10^{-5}.$$

Conclusión:

$$\int_0^1 \sin(x) dx \approx 0.4597077449, \quad |E_S| \leq 2.17 \times 10^{-5}.$$

Solución orientativa del ejercicio 5

Queremos aproximar el mínimo de

$$f(x) = e^x + \frac{x^2}{2}$$

aplicando dos pasos de Newton-Raphson a una función adecuada, partiendo de $x_0 = -0.5$.

Paso 1: convertir el problema de mínimo en ecuación

Un mínimo interior se obtiene resolviendo

$$f'(x) = 0.$$

Definimos

$$g(x) := f'(x) = e^x + x.$$

Entonces

$$g'(x) = e^x + 1.$$

El método de Newton para $g(x) = 0$ es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n}{e^{x_n} + 1}.$$

Paso 2: dos iteraciones desde $x_0 = -0.5$

$$x_1 = x_0 - \frac{e^{x_0} + x_0}{e^{x_0} + 1} = -0.5 - \frac{e^{-0.5} - 0.5}{e^{-0.5} + 1} \approx -0.5663110032.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{e^{x_1} + x_1}{e^{x_1} + 1} \approx -0.5671431650.$$

Aproximación del punto de mínimo

$$x_{\min} \approx -0.5671431650.$$

Valor mínimo aproximado

$$f(x_{\min}) \approx f(x_2) = e^{x_2} + \frac{x_2^2}{2} \approx 0.7279690463.$$

Conclusión:

$$\text{mínimo en } x \approx -0.5671431650, \quad f_{\min} \approx 0.7279690463.$$

Solución orientativa del ejercicio 6

Se quiere ajustar el modelo

$$y(x) = \cos(ax + b)$$

a los datos

$$(x_i, y_i) \in \{(0, 0.5), (1, 1), (2, 0.6)\}.$$

(a) Función a minimizar (mínimos cuadrados)

Definimos los residuos

$$r_i(a, b) = \cos(ax_i + b) - y_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

La función objetivo es

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=1}^3 r_i(a, b)^2.$$

Sustituyendo los datos:

$$\Phi(a, b) = (\cos(b) - 0.5)^2 + (\cos(a + b) - 1)^2 + (\cos(2a + b) - 0.6)^2.$$

(b) Método propuesto para calcular a y b

Para calcular a y b hay que **minimizar** la función

$$\Phi(a, b) = (\cos(b) - 0.5)^2 + (\cos(a + b) - 1)^2 + (\cos(2a + b) - 0.6)^2.$$

En un mínimo deben anularse las derivadas de Φ :

$$-2 \sin(a + b)(\cos(a + b) - 1) - 4 \sin(2a + b)(\cos(2a + b) - 0.6) = 0,$$

$$-2 \sin(b)(\cos(b) - 0.5) - 2 \sin(a + b)(\cos(a + b) - 1) - 2 \sin(2a + b)(\cos(2a + b) - 0.6) = 0.$$

Esto da un sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. Para resolverlo, podemos aplicar el método de Newton.