Cálculo Numérico y Estadística

Primera parte: Cálculo Numérico

José Luis Bravo

Curso 2019/2020
Segundo semestre

Interpolación polinómica segmentaria (splines)

Muchas veces, el polinomio $P(x)$ que resulta de interpolar una función $f(x)$ en una serie de puntos queremos utilizarlo para aproximar esa función en algún otro punto. Pero puede ocurrir que esa aproximación sea realmente mala cuando el polinomio "oscile" mucho más que la función. Por ejemplo, el polinomio $P(x)$ de grado ≤ 4 que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$ es

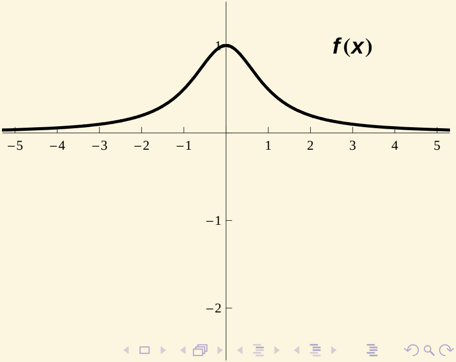
$$P(x) = \frac{1}{52}x^4 - \frac{27}{52}x^2 + 1.$$

Interpolación polinómica segmentaria (splines)

Muchas veces, el polinomio $P(x)$ que resulta de interpolar una función $f(x)$ en una serie de puntos queremos utilizarlo para aproximar esa función en algún otro punto. Pero puede ocurrir que esa aproximación sea realmente mala cuando el polinomio "oscile" mucho más que la función. Por ejemplo, el polinomio $P(x)$ de grado ≤ 4 que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$ es

$$P(x) = \frac{1}{52}x^4 - \frac{27}{52}x^2 + 1.$$

Gráficamente,

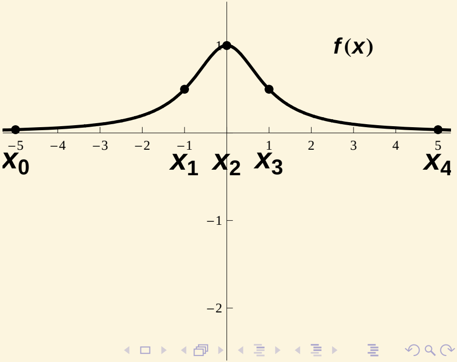


Interpolación polinómica segmentaria (splines)

Muchas veces, el polinomio $P(x)$ que resulta de interpolar una función $f(x)$ en una serie de puntos queremos utilizarlo para aproximar esa función en algún otro punto. Pero puede ocurrir que esa aproximación sea realmente mala cuando el polinomio "oscile" mucho más que la función. Por ejemplo, el polinomio $P(x)$ de grado ≤ 4 que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$ es

$$P(x) = \frac{1}{52}x^4 - \frac{27}{52}x^2 + 1.$$

Gráficamente,

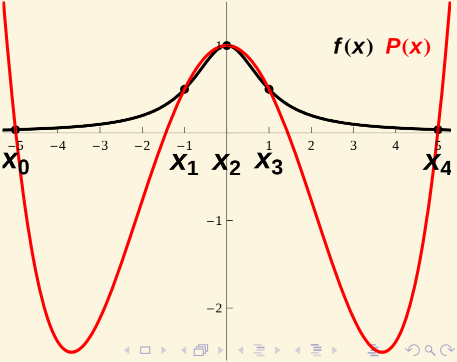


Interpolación polinómica segmentaria (splines)

Muchas veces, el polinomio $P(x)$ que resulta de interpolar una función $f(x)$ en una serie de puntos queremos utilizarlo para aproximar esa función en algún otro punto. Pero puede ocurrir que esa aproximación sea realmente mala cuando el polinomio "oscile" mucho más que la función. Por ejemplo, el polinomio $P(x)$ de grado ≤ 4 que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$ es

$$P(x) = \frac{1}{52}x^4 - \frac{27}{52}x^2 + 1.$$

Gráficamente,

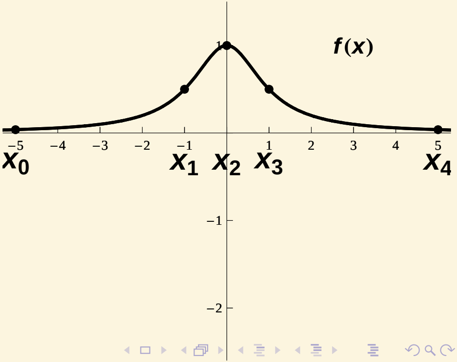


Interpolación polinómica segmentaria (splines)

Muchas veces, el polinomio $P(x)$ que resulta de interpolar una función $f(x)$ en una serie de puntos queremos utilizarlo para aproximar esa función en algún otro punto. Pero puede ocurrir que esa aproximación sea realmente mala cuando el polinomio "oscile" mucho más que la función. Por ejemplo, el polinomio $P(x)$ de grado ≤ 4 que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$ es

$$P(x) = \frac{1}{52}x^4 - \frac{27}{52}x^2 + 1.$$

En estos casos puede ser mejor recurrir a la interpolación polinómica segmentaria, que consiste en interpolar la función $f(x)$ mediante una función que está creada pegando trozos de polinomios.

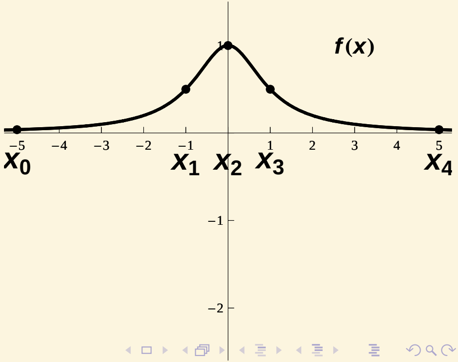


Interpolación polinómica segmentaria (splines)

Muchas veces, el polinomio $P(x)$ que resulta de interpolar una función $f(x)$ en una serie de puntos queremos utilizarlo para aproximar esa función en algún otro punto. Pero puede ocurrir que esa aproximación sea realmente mala cuando el polinomio "oscile" mucho más que la función. Por ejemplo, el polinomio $P(x)$ de grado ≤ 4 que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$ es

$$P(x) = \frac{1}{52}x^4 - \frac{27}{52}x^2 + 1.$$

En estos casos puede ser mejor recurrir a la interpolación polinómica segmentaria, que consiste en interpolar la función $f(x)$ mediante una función que está creada pegando trozos de polinomios. El caso más simple sería unir puntos consecutivos de interpolación mediante segmentos, pero la función que resulta es poco regular.

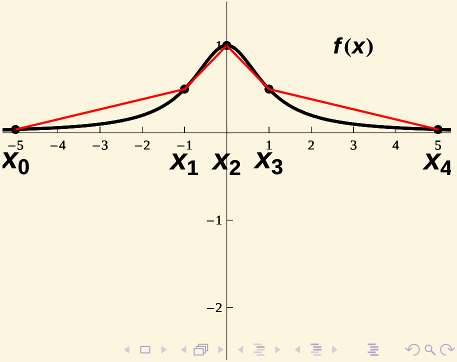


Interpolación polinómica segmentaria (splines)

Muchas veces, el polinomio $P(x)$ que resulta de interpolar una función $f(x)$ en una serie de puntos queremos utilizarlo para aproximar esa función en algún otro punto. Pero puede ocurrir que esa aproximación sea realmente mala cuando el polinomio "oscile" mucho más que la función. Por ejemplo, el polinomio $P(x)$ de grado ≤ 4 que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$ es

$$P(x) = \frac{1}{52}x^4 - \frac{27}{52}x^2 + 1.$$

En estos casos puede ser mejor recurrir a la interpolación polinómica segmentaria, que consiste en interpolar la función $f(x)$ mediante una función que está creada pegando trozos de polinomios. El caso más simple sería unir puntos consecutivos de interpolación mediante segmentos, pero la función que resulta es poco regular.



Splines cúbicos. Interpolar una función $f(x)$ en los puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, mediante un spline cúbico consiste en crear una función $S(x)$ definida en el intervalo $[x_0, x_n]$ de la siguiente forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ \quad \vdots \\ S_{n-1}(x) \text{ si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

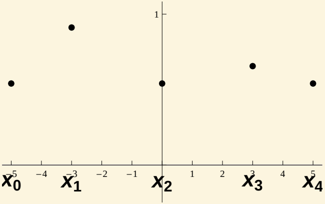
en donde los $S_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots,$ n-1, son polinomios de grado ≤ 3,

$$S_i(x) = a_{i3}x^3 + a_{i2}x^2 + a_{i1}x + a_{i0}$$

que deben verificar las siguientes condiciones:

Splines cúbicos. Interpolar una función $f(x)$ en los puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, mediante un spline cúbico consiste en crear una función $S(x)$ definida en el intervalo $[x_0, x_n]$ de la siguiente forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ \quad \vdots \\ S_{n-1}(x) \text{ si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

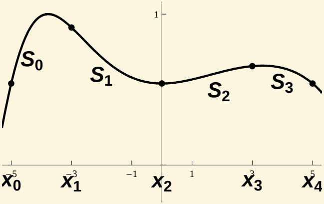


1) La función $S(x)$ debe ser continua e interpolar a $f(x)$ en $x_0, \ldots, x_n$, es decir:

$$S_0(x_0) = f(x_0), \quad S_1(x_1) = f(x_1), \quad S_2(x_2) = f(x_2), \quad \ldots, \quad S_{n-1}(x_{n-1}) = f(x_{n-1}),$$
$$S_0(x_1) = f(x_1), \quad S_1(x_2) = f(x_2), \quad S_2(x_3) = f(x_3), \quad \ldots, \quad S_{n-1}(x_n) = f(x_n),$$

Splines cúbicos. Interpolar una función $f(x)$ en los puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, mediante un spline cúbico consiste en crear una función $S(x)$ definida en el intervalo $[x_0, x_n]$ de la siguiente forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ \quad \vdots \\ S_{n-1}(x) \text{ si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

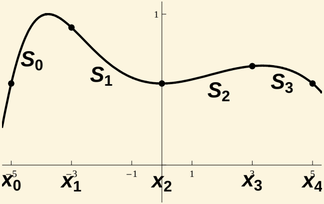


1) La función $S(x)$ debe ser continua e interpolar a $f(x)$ en $x_0, \ldots, x_n$, es decir:

$$S_0(x_0)=f(x_0), \quad S_1(x_1)=f(x_1), \quad S_2(x_2)=f(x_2), \quad \ldots, \quad S_{n-1}(x_{n-1})=f(x_{n-1}),$$
$$S_0(x_1)=f(x_1), \quad S_1(x_2)=f(x_2), \quad S_2(x_3)=f(x_3), \quad \ldots, \quad S_{n-1}(x_n)=f(x_n),$$

Splines cúbicos. Interpolar una función $f(x)$ en los puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, mediante un spline cúbico consiste en crear una función $S(x)$ definida en el intervalo $[x_0, x_n]$ de la siguiente forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ \quad\vdots \\ S_{n-1}(x) \text{ si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$



1) La función $S(x)$ debe ser continua e interpolar a $f(x)$ en $x_0, \ldots, x_n$, es decir:

$$S_0(x_0) = f(x_0), \quad S_1(x_1) = f(x_1), \quad S_2(x_2) = f(x_2), \quad \ldots, \quad S_{n-1}(x_{n-1}) = f(x_{n-1}),$$
$$S_0(x_1) = f(x_1), \quad S_1(x_2) = f(x_2), \quad S_2(x_3) = f(x_3), \quad \ldots, \quad S_{n-1}(x_n) = f(x_n),$$

2) La función $S(x)$ debe ser de clase 2 en $[x_0, x_n]$. Por tanto:

$$S_0'(x_1) = S_1'(x_1), \quad S_1'(x_2) = S_2'(x_2), \quad \ldots, \quad S_{n-2}'(x_{n-1}) = S_{n-1}'(x_{n-1}),$$
$$S_0''(x_1) = S_1''(x_1), \quad S_1''(x_2) = S_2''(x_2), \quad \ldots, \quad S_{n-2}''(x_{n-1}) = S_{n-1}''(x_{n-1}),$$

Splines cúbicos. Interpolar una función $f(x)$ en los puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, mediante un spline cúbico consiste en crear una función $S(x)$ definida en el intervalo $[x_0, x_n]$ de la siguiente forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ \quad \vdots \\ S_{n-1}(x) \text{ si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Para definir $S(x)$ tenemos que determinar los $4n$ coeficientes $(a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, i = 0, 1, \ldots, n-1)$ que definen los polinomios $S_0, \ldots, S_{n-1}$. Las condiciones 1) y 2) nos dan ecuaciones.

1) La función $S(x)$ debe ser continua e interpolar a $f(x)$ en $x_0, \ldots, x_n$, es decir:

$$S_0(x_0)=f(x_0), \quad S_1(x_1)=f(x_1), \quad S_2(x_2)=f(x_2), \quad \ldots, \quad S_{n-1}(x_{n-1})=f(x_{n-1}),$$
$$S_0(x_1)=f(x_1), \quad S_1(x_2)=f(x_2), \quad S_2(x_3)=f(x_3), \quad \ldots, \quad S_{n-1}(x_n)=f(x_n),$$

2) La función $S(x)$ debe ser de clase 2 en $[x_0, x_n]$. Por tanto:

$$S_0'(x_1)=S_1'(x_1), \quad S_1'(x_2)=S_2'(x_2), \quad \ldots, \quad S_{n-2}'(x_{n-1})=S_{n-1}'(x_{n-1}),$$
$$S_0''(x_1)=S_1''(x_1), \quad S_1''(x_2)=S_2''(x_2), \quad \ldots, \quad S_{n-2}''(x_{n-1})=S_{n-1}''(x_{n-1}),$$

Splines cúbicos. Interpolar una función $f(x)$ en los puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, mediante un spline cúbico consiste en crear una función $S(x)$ definida en el intervalo $[x_0, x_n]$ de la siguiente forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ \quad\vdots \\ S_{n-1}(x) \text{ si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Para definir $S(x)$ tenemos que determinar los $4n$ coeficientes $(a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1)$ que definen los polinomios $S_0, \ldots, S_{n-1}$. Las condiciones 1) y 2) nos dan $4n-2$ ecuaciones.

1) La función $S(x)$ debe ser continua e interpolar a $f(x)$ en $x_0, \ldots, x_n$, es decir:

$$\begin{array}{lllll} S_0(x_0)=f(x_0), & S_1(x_1)=f(x_1), & S_2(x_2)=f(x_2), & \ldots, & S_{n-1}(x_{n-1})=f(x_{n-1}), \\ S_0(x_1)=f(x_1), & S_1(x_2)=f(x_2), & S_2(x_3)=f(x_3), & \ldots, & S_{n-1}(x_n)=f(x_n), \end{array}$$

2) La función $S(x)$ debe ser de clase 2 en $[x_0, x_n]$. Por tanto:

$$\begin{array}{llll} S_0'(x_1)=S_1'(x_1), & S_1'(x_2)=S_2'(x_2), & \ldots, & S_{n-2}'(x_{n-1})=S_{n-1}'(x_{n-1}), \\ S_0''(x_1)=S_1''(x_1), & S_1''(x_2)=S_2''(x_2), & \ldots, & S_{n-2}''(x_{n-1})=S_{n-1}''(x_{n-1}), \end{array}$$

Splines cúbicos. Interpolar una función $f(x)$ en los puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, mediante un spline cúbico consiste en crear una función $S(x)$ definida en el intervalo $[x_0, x_n]$ de la siguiente forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ \quad \vdots \\ S_{n-1}(x) \text{ si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Para definir $S(x)$ tenemos que determinar los $4n$ coeficientes $(a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1)$ que definen los polinomios $S_0, \ldots, S_{n-1}$. Las condiciones 1) y 2) nos dan $4n-2$ ecuaciones. Podemos añadir dos ecuaciones más.

1) La función $S(x)$ debe ser continua e interpolar a $f(x)$ en $x_0, \ldots, x_n$, es decir:

$$\begin{array}{lllll} S_0(x_0)=f(x_0), & S_1(x_1)=f(x_1), & S_2(x_2)=f(x_2), & \ldots, & S_{n-1}(x_{n-1})=f(x_{n-1}), \\ S_0(x_1)=f(x_1), & S_1(x_2)=f(x_2), & S_2(x_3)=f(x_3), & \ldots, & S_{n-1}(x_n)=f(x_n), \end{array}$$

2) La función $S(x)$ debe ser de clase 2 en $[x_0, x_n]$. Por tanto:

$$\begin{array}{llll} S_0'(x_1)=S_1'(x_1), & S_1'(x_2)=S_2'(x_2), & \ldots, & S_{n-2}'(x_{n-1})=S_{n-1}'(x_{n-1}), \\ S_0''(x_1)=S_1''(x_1), & S_1''(x_2)=S_2''(x_2), & \ldots, & S_{n-2}''(x_{n-1})=S_{n-1}''(x_{n-1}), \end{array}$$

Splines cúbicos. Interpolar una función $f(x)$ en los puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, mediante un spline cúbico consiste en crear una función $S(x)$ definida en el intervalo $[x_0, x_n]$ de la siguiente forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ \quad \vdots \\ S_{n-1}(x) \text{ si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Para definir $S(x)$ tenemos que determinar los $4n$ coeficientes $(a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, i = 0, 1, \ldots, n-1)$ que definen los polinomios $S_0, \ldots, S_{n-1}$. Las condiciones 1) y 2) nos dan $4n-2$ ecuaciones. Podemos añadir dos ecuaciones más.

1) La función $S(x)$ debe ser continua e interpolar a $f(x)$ en $x_0, \ldots, x_n$, es decir:

$$\begin{array}{lllll} S_0(x_0)=f(x_0), & S_1(x_1)=f(x_1), & S_2(x_2)=f(x_2), & \ldots, & S_{n-1}(x_{n-1})=f(x_{n-1}), \\ S_0(x_1)=f(x_1), & S_1(x_2)=f(x_2), & S_2(x_3)=f(x_3), & \ldots, & S_{n-1}(x_n)=f(x_n), \end{array}$$

2) La función $S(x)$ debe ser de clase 2 en $[x_0, x_n]$. Por tanto:

$$\begin{array}{llll} S_0'(x_1)=S_1'(x_1), & S_1'(x_2)=S_2'(x_2), & \ldots, & S_{n-2}'(x_{n-1})=S_{n-1}'(x_{n-1}), \\ S_0''(x_1)=S_1''(x_1), & S_1''(x_2)=S_2''(x_2), & \ldots, & S_{n-2}''(x_{n-1})=S_{n-1}''(x_{n-1}), \end{array}$$

3) Spline natural: $S_0''(x_0) = 0, \quad S_{n-1}''(x_n) = 0,$

Splines cúbicos. Interpolar una función $f(x)$ en los puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, mediante un spline cúbico consiste en crear una función $S(x)$ definida en el intervalo $[x_0, x_n]$ de la siguiente forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ \quad \vdots \\ S_{n-1}(x) \text{ si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Para definir $S(x)$ tenemos que determinar los $4n$ coeficientes $(a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1)$ que definen los polinomios $S_0, \ldots, S_{n-1}$. Las condiciones 1) y 2) nos dan $4n-2$ ecuaciones. Podemos añadir dos ecuaciones más.

1) La función $S(x)$ debe ser continua e interpolar a $f(x)$ en $x_0, \ldots, x_n$, es decir:

$$S_0(x_0) = f(x_0), \quad S_1(x_1) = f(x_1), \quad S_2(x_2) = f(x_2), \quad \ldots, \quad S_{n-1}(x_{n-1}) = f(x_{n-1}),$$
$$S_0(x_1) = f(x_1), \quad S_1(x_2) = f(x_2), \quad S_2(x_3) = f(x_3), \quad \ldots, \quad S_{n-1}(x_n) = f(x_n),$$

2) La función $S(x)$ debe ser de clase 2 en $[x_0, x_n]$. Por tanto:

$$S_0'(x_1) = S_1'(x_1), \quad S_1'(x_2) = S_2'(x_2), \quad \ldots, \quad S_{n-2}'(x_{n-1}) = S_{n-1}'(x_{n-1}),$$
$$S_0''(x_1) = S_1''(x_1), \quad S_1''(x_2) = S_2''(x_2), \quad \ldots, \quad S_{n-2}''(x_{n-1}) = S_{n-1}''(x_{n-1}),$$

3) Spline natural: $S_0''(x_0) = 0$, $\quad S_{n-1}''(x_n) = 0$, $\quad$ ó

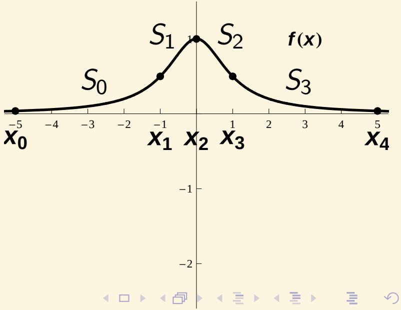
Spline con pendientes inicial y final fijadas: $S_0'(x_0) = f_0$, $\quad S_{n-1}'(x_n) = f_n$

Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

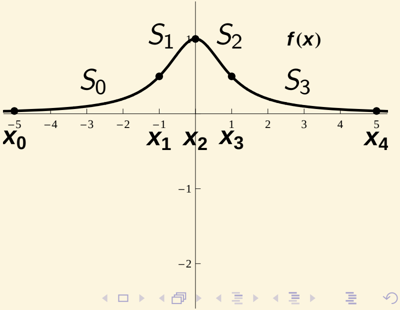


Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Para determinar los 16 a_{ij} utilizamos las condiciones 1), 2) y 3), lo que nos da un sistema de 16 ecuaciones con 16 incógnitas.



Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

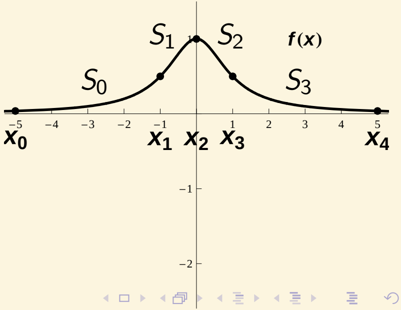
Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Las ecuaciones de 1) son:

$$S_0(x_0) = f(x_0) \rightarrow S_0(-5) = f(-5) \rightarrow$$

$$a_{03}(-5)^3 + a_{02}(-5)^2 + a_{01}(-5) + a_{00} = \frac{1}{1+(-5)^2}$$



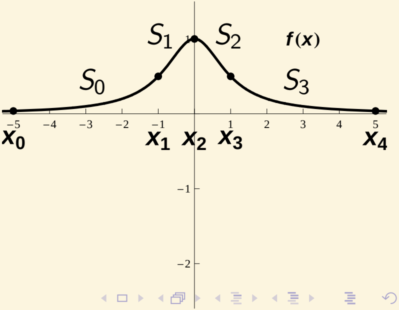
Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Las ecuaciones de 1) son:

$$S_0(x_0) = f(x_0) \to S_0(-5) = f(-5) \to$$
$$a_{03}(-5)^3 + a_{02}(-5)^2 + a_{01}(-5) + a_{00} = \frac{1}{1+(-5)^2}$$
$$S_0(x_1) = f(x_1) \to S_0(-1) = f(-1) \to$$
$$a_{03}(-1)^3 + a_{02}(-1)^2 + a_{01}(-1) + a_{00} = \frac{1}{1+(-1)^2}$$



Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Las ecuaciones de 1) son:

$S_0(x_0) = f(x_0) \rightarrow S_0(-5) = f(-5) \rightarrow$

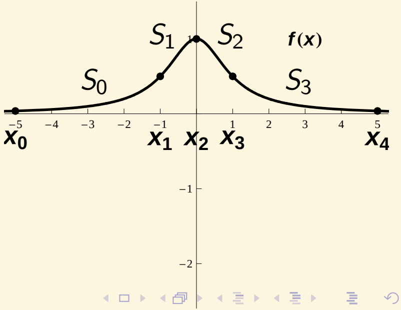
$a_{03}(-5)^3 + a_{02}(-5)^2 + a_{01}(-5) + a_{00} = \frac{1}{1+(-5)^2}$

$S_0(x_1) = f(x_1) \rightarrow S_0(-1) = f(-1) \rightarrow$

$a_{03}(-1)^3 + a_{02}(-1)^2 + a_{01}(-1) + a_{00} = \frac{1}{1+(-1)^2}$

$S_1(x_1) = f(x_1) \rightarrow S_1(-1) = f(-1) \rightarrow$

$a_{13}(-1)^3 + a_{12}(-1)^2 + a_{11}(-1) + a_{10} = \frac{1}{1+(-1)^2}$



Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Las ecuaciones de 1) son:

$S_0(x_0) = f(x_0) \rightarrow S_0(-5) = f(-5) \rightarrow$

$a_{03}(-5)^3 + a_{02}(-5)^2 + a_{01}(-5) + a_{00} = \frac{1}{1+(-5)^2}$

$S_0(x_1) = f(x_1) \rightarrow S_0(-1) = f(-1) \rightarrow$

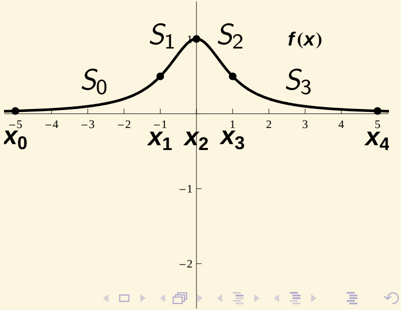
$a_{03}(-1)^3 + a_{02}(-1)^2 + a_{01}(-1) + a_{00} = \frac{1}{1+(-1)^2}$

$S_1(x_1) = f(x_1) \rightarrow S_1(-1) = f(-1) \rightarrow$

$a_{13}(-1)^3 + a_{12}(-1)^2 + a_{11}(-1) + a_{10} = \frac{1}{1+(-1)^2}$

$S_1(x_2) = f(x_2) \rightarrow S_1(0) = f(0) \rightarrow$

$a_{13}(0)^3 + a_{12}(0)^2 + a_{11}(0) + a_{10} = \frac{1}{1+0^2}$



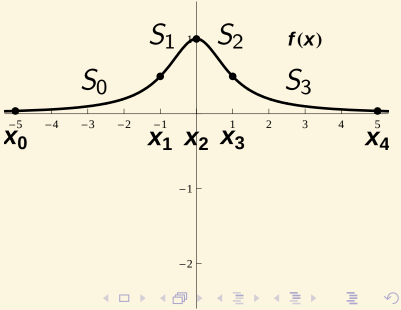
Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Las ecuaciones de 1) son:

$$S_2(x_2) = f(x_2) \rightarrow S_2(0) = f(0) \rightarrow$$
$$a_{23}(0)^3 + a_{22}(0)^2 + a_{21}(0) + a_{20} = \frac{1}{1+(0)^2}$$



Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

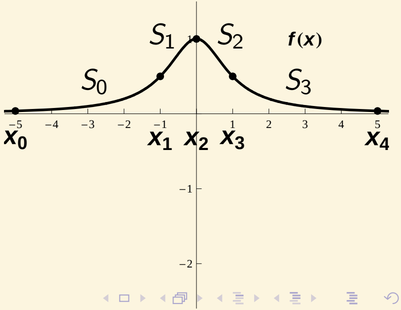
Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Las ecuaciones de 1) son:

$$S_2(x_2) = f(x_2) \rightarrow S_2(0) = f(0) \rightarrow$$
$$a_{23}(0)^3 + a_{22}(0)^2 + a_{21}(0) + a_{20} = \frac{1}{1+(0)^2}$$

$$S_2(x_3) = f(x_3) \rightarrow S_2(1) = f(1) \rightarrow$$
$$a_{23}(1)^3 + a_{22}(1)^2 + a_{21}(1) + a_{20} = \frac{1}{1+(1)^2}$$



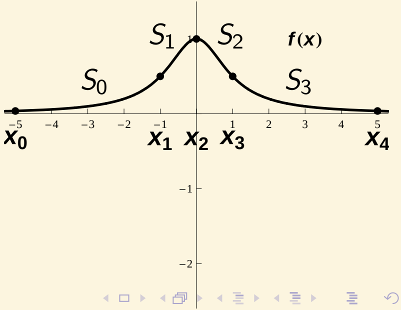
Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Las ecuaciones de 1) son:

$$S_2(x_2) = f(x_2) \rightarrow S_2(0) = f(0) \rightarrow$$
$$a_{23}(0)^3 + a_{22}(0)^2 + a_{21}(0) + a_{20} = \frac{1}{1+(0)^2}$$
$$S_2(x_3) = f(x_3) \rightarrow S_2(1) = f(1) \rightarrow$$
$$a_{23}(1)^3 + a_{22}(1)^2 + a_{21}(1) + a_{20} = \frac{1}{1+(1)^2}$$
$$S_3(x_3) = f(x_3) \rightarrow S_3(1) = f(1) \rightarrow$$
$$a_{33}(1)^3 + a_{32}(1)^2 + a_{31}(1) + a_{30} = \frac{1}{1+(1)^2}$$



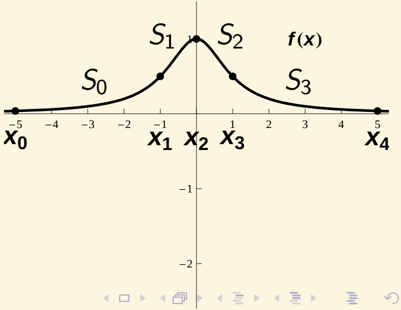
Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Las ecuaciones de 1) son:

$$S_2(x_2) = f(x_2) \to S_2(0) = f(0) \to$$
$$a_{23}(0)^3 + a_{22}(0)^2 + a_{21}(0) + a_{20} = \frac{1}{1+(0)^2}$$
$$S_2(x_3) = f(x_3) \to S_2(1) = f(1) \to$$
$$a_{23}(1)^3 + a_{22}(1)^2 + a_{21}(1) + a_{20} = \frac{1}{1+(1)^2}$$
$$S_3(x_3) = f(x_3) \to S_3(1) = f(1) \to$$
$$a_{33}(1)^3 + a_{32}(1)^2 + a_{31}(1) + a_{30} = \frac{1}{1+(1)^2}$$
$$S_3(x_4) = f(x_4) \to S_3(5) = f(5) \to$$
$$a_{33}(5)^3 + a_{32}(5)^2 + a_{31}(5) + a_{30} = \frac{1}{1+(5)^2}$$



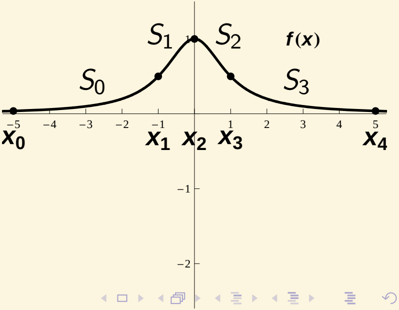
Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Las ecuaciones de 2) son:

$$S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \rightarrow S_0'(-1) = S_1'(-1) \rightarrow$$
$$3a_{03}(-1)^2 + 2a_{02}(-1) + a_{01} =$$
$$3a_{13}(-1)^2 + 2a_{12}(-1) + a_{11}$$



Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Las ecuaciones de 2) son:

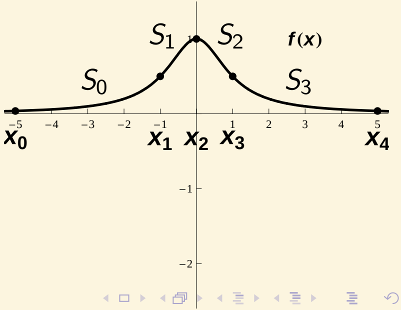
$S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \to S_0'(-1) = S_1'(-1) \to$

$3a_{03}(-1)^2 + 2a_{02}(-1) + a_{01} =$

$3a_{13}(-1)^2 + 2a_{12}(-1) + a_{11}$

$S_0''(x_1) = S_1''(x_1) \to S_0''(-1) = S_1''(-1) \to$

$6a_{03}(-1) + 2a_{02} = 6a_{13}(-1) + 2a_{12}$



Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

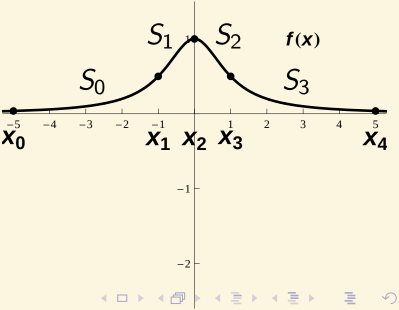
Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Las ecuaciones de 2) son:

$S_1'(x_2) = S_2'(x_2) \rightarrow S_1'(0) = S_2'(0) \rightarrow$

$3a_{13}(0)^2 + 2a_{12}(0) + a_{11} =$
$3a_{23}(0)^2 + 2a_{22}(0) + a_{21}$



Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

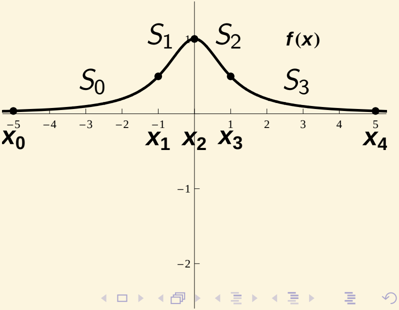
Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Las ecuaciones de 2) son:

$S_1'(x_2) = S_2'(x_2) \rightarrow S_1'(0) = S_2'(0) \rightarrow$
$3a_{13}(0)^2+2a_{12}(0)+a_{11}=$
$3a_{23}(0)^2+2a_{22}(0)+a_{21}$

$S_1''(x_2)=S_2''(x_2)\rightarrow S_1''(0)=S_2''(0)\rightarrow$
$6a_{13}(0)+2a_{12}=6a_{23}(0)+2a_{22}$



Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

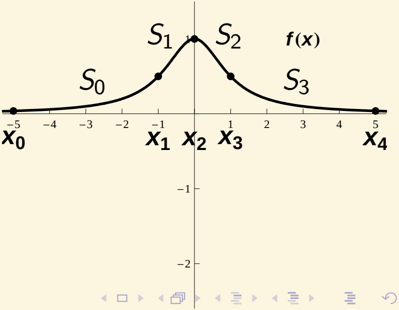
Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Las ecuaciones de 2) son:

$S_2'(x_3) = S_3'(x_3) \rightarrow S_2'(1) = S_3'(1) \rightarrow$

$3a_{23}(1)^2 + 2a_{22}(1) + a_{21} =$
$3a_{33}(1)^2 + 2a_{32}(1) + a_{31}$



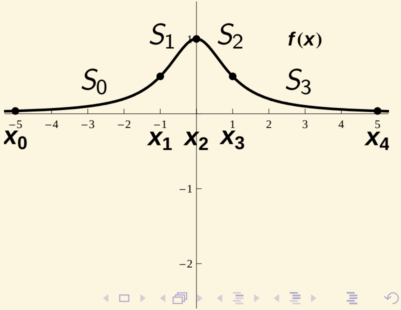
Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.
Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Las ecuaciones de 2) son:

$S_2'(x_3) = S_3'(x_3) \rightarrow S_2'(1) = S_3'(1) \rightarrow$
$3a_{23}(1)^2 + 2a_{22}(1) + a_{21} =$
$3a_{33}(1)^2 + 2a_{32}(1) + a_{31}$

$S_2''(x_3) = S_3''(x_3) \rightarrow S_2''(1) = S_3''(1) \rightarrow$
$6a_{23}(1) + 2a_{22} = 6a_{33}(1) + 2a_{32}$



Ejemplo: Calcular el spline cúbico natural que interpola a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en los puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que $S(x)$ será de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00} \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = a_{33}x^3 + a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} \text{ si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

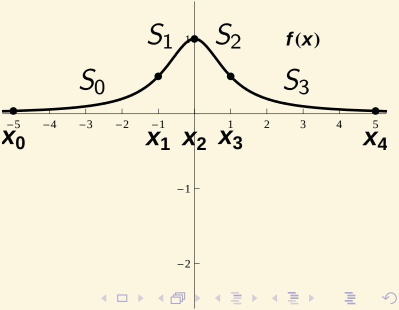
Las ecuaciones de 3) (spline natural) son:

$S_0''(x_0) = 0 \to S_0''(-5) = 0 \to$

$6a_{03}(-5)+2a_{02}=0$

$S_3''(x_4) = 0 \to S_3''(5) = 0 \to$

$6a_{33}(5)+2a_{32}=0$



Las 16 ecuaciones que resultan son:

$$-125a_{03} + 25a_{02} - 5a_{01} + a_{00} = \frac{1}{26}$$

$$-a_{03} + a_{02} - a_{01} + a_{00} = \frac{1}{2}$$

$$-a_{13} + a_{12} - a_{11} + a_{10} = \frac{1}{2}$$

$$a_{10} = 1 \qquad a_{20} = 1$$

$$a_{23} + a_{22} + a_{21} + a_{20} = \frac{1}{2}$$

$$a_{33} + a_{32} + a_{31} + a_{30} = \frac{1}{2}$$

$$125a_{33} + 25a_{32} + 5a_{31} + a_{30} = \frac{1}{26}$$

$$3a_{03} - 2a_{02} + a_{01} = 3a_{13} - 2a_{12} + a_{11}$$

$$-3a_{03} + 2a_{02} = -6a_{13} + 2a_{12}$$

$$a_{11} = a_{21} \qquad 2a_{12} = 2a_{22}$$

$$3a_{23} + 2a_{22} + a_{21} = 3a_{33} + 2a_{32} + a_{31}$$

$$6a_{23} + 2a_{22} = 6a_{33} + 2a_{32}$$

$$-30a_{03} + 2a_{02} = 0$$

$$30a_{33} + 2a_{32} = 0$$

Su resolución da lugar al spline:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 + \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = -\frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = \frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = -\frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 - \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Su resolución da lugar al spline:

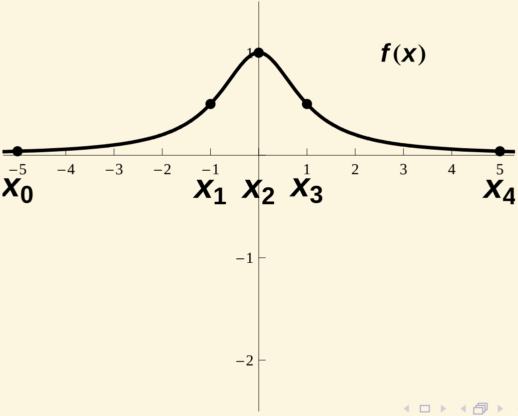
$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 + \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = -\frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = \frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = -\frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 - \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Gráficamente:

Su resolución da lugar al spline:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 + \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = -\frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = \frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = -\frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 - \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

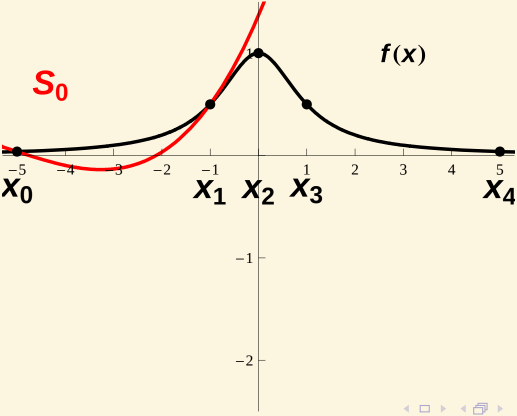
Gráficamente:



Su resolución da lugar al spline:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 + \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = -\frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = \frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = -\frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 - \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

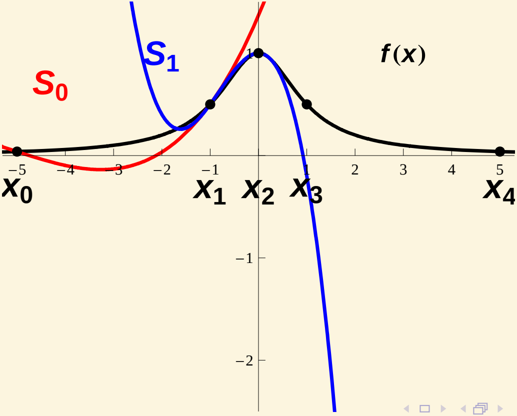
Gráficamente:



Su resolución da lugar al spline:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 + \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = -\frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = \frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = -\frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 - \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

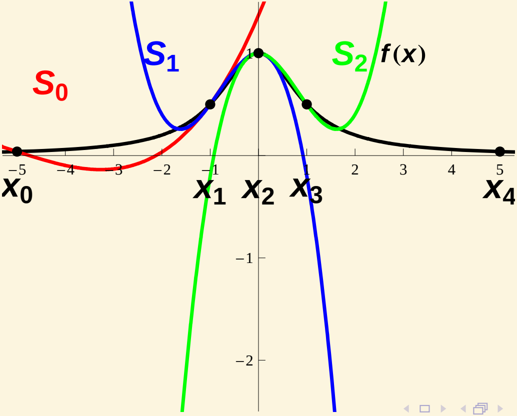
Gráficamente:



Su resolución da lugar al spline:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 + \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = -\frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = \frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = -\frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 - \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

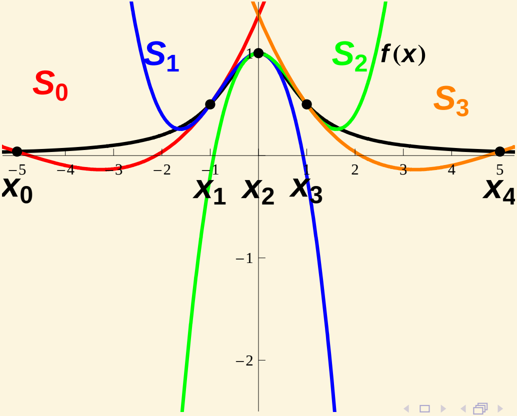
Gráficamente:



Su resolución da lugar al spline:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 + \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = -\frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = \frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = -\frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 - \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

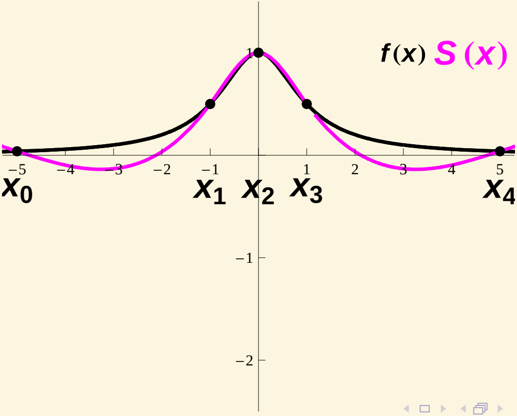
Gráficamente:



Su resolución da lugar al spline:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 + \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = -\frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = \frac{173}{494}x^3 - \frac{210}{247}x^2 + 1 & \text{si } x \in [x_2, x_3] \\ S_3(x) = -\frac{33}{1976}x^3 + \frac{495}{1976}x^2 - \frac{2175}{1976}x + \frac{2701}{1976} & \text{si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Gráficamente:



Ejercicio: Calcular el spline cúbico natural definido en $[0,2]$, que interpola a una función $f(x)$ que toma los valores $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=0$.

Solución: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$,

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=a_{03}x^3+a_{02}x^2+a_{01}x+a_{00} \text{ si } x\in[x_0,x_1] \\ S_1(x)=a_{13}x^3+a_{12}x^2+a_{11}x+a_{10} \text{ si } x\in[x_1,x_2] \end{cases}$$

Los ocho coeficientes deben verificar las condiciones:

$$S_0(x_0)=f(x_0)\rightarrow S_0(0)=f(0)\rightarrow a_{03}0^3+a_{02}0^2+a_{01}0+a_{00}=0$$
$$S_0(x_1)=f(x_1)\rightarrow S_0(1)=f(1)\rightarrow a_{03}1^3+a_{02}1^2+a_{01}1+a_{00}=1$$
$$S_1(x_1)=f(x_1)\rightarrow S_1(1)=f(1)\rightarrow a_{13}1^3+a_{12}1^2+a_{11}1+a_{10}=1$$
$$S_1(x_2)=f(x_2)\rightarrow S_1(2)=f(2)\rightarrow a_{13}2^3+a_{12}2^2+a_{11}2+a_{10}=0$$

$$S_0'(x_1)=S_1'(x_1)\rightarrow S_0'(1)=S_1'(1)\rightarrow 3a_{03}1^2+2a_{02}1+a_{01}=3a_{13}1^2+2a_{12}1+a_{11}$$
$$S_0''(x_1)=S_1''(x_1)\rightarrow S_0''(1)=S_1''(1)\rightarrow 6a_{03}1+2a_{02}=6a_{13}1+2a_{12}$$

$$S_0''(x_0)=0\rightarrow S_0''(0)=0\rightarrow 6a_{03}0+2a_{02}=0$$
$$S_1''(x_2)=0\rightarrow S_1''(2)=0\rightarrow 6a_{13}2+2a_{12}=0$$

que dan lugar al sistema

Ejercicio: Calcular el spline cúbico natural definido en $[0,2]$, que interpola a una función $f(x)$ que toma los valores $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=0$.

Solución: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$,

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=a_{03}x^3+a_{02}x^2+a_{01}x+a_{00} \text{ si } x\in[x_0,x_1] \\ S_1(x)=a_{13}x^3+a_{12}x^2+a_{11}x+a_{10} \text{ si } x\in[x_1,x_2] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&a_{00}=0\\
&a_{03}+a_{02}+a_{01}+a_{00}=1\\
&a_{13}+a_{12}+a_{11}+a_{10}=1\\
&8a_{13}+4a_{12}+2a_{11}+a_{10}=0\\
&3a_{03}+2a_{02}+a_{01}=3a_{13}+2a_{12}+a_{11}\\
&3a_{03}+a_{02}=3a_{13}+a_{12}\\
&a_{02}=0\\
&6a_{13}+a_{12}=0
\end{aligned}$$

cuya solución es

$$a_{00}=0,\quad a_{01}=\frac{3}{2},\quad a_{02}=0,\quad a_{03}=-\frac{1}{2}$$
$$a_{10}=-1,\quad a_{11}=\frac{9}{2},\quad a_{12}=-3,\quad a_{13}=\frac{1}{2}$$

Ejercicio: Calcular el spline cúbico natural definido en $[0,2]$, que interpola a una función $f(x)$ que toma los valores $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=0$.

Solución: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$,

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=a_{03}x^3+a_{02}x^2+a_{01}x+a_{00} \text{ si } x\in[x_0,x_1] \\ S_1(x)=a_{13}x^3+a_{12}x^2+a_{11}x+a_{10} \text{ si } x\in[x_1,x_2] \end{cases}$$

con lo que $$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x \text{ si } x\in[0,1] \\ S_1(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x-1 \text{ si } x\in[1,2] \end{cases}$$