Cálculo Numérico y Estadística

Primera parte: Cálculo Numérico

José Luis Bravo

Curso 2019/2020
Segundo semestre

Ejercicios: Aplicar las fórmulas de los trapecios y de Simpson para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ en los siguientes casos:

1) $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$

2) $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

3) $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$

4) $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$

Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$

Trapecio:

Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$

Trapecio: $\displaystyle\int_0^1 x^4\,dx \approx$

Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$

Trapecio: $$\int_0^1 x^4\, dx \approx \frac{1-0}{2}(0^4 + 1^4) = \frac{1}{2} = 0.5$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$

Trapecio: $$\int_0^1 x^4\,dx \approx \frac{1-0}{2}(0^4 + 1^4) = \frac{1}{2} = 0.5$$

Simpson:

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$

Trapecio: $$\int_0^1 x^4\,dx \approx \frac{1-0}{2}(0^4 + 1^4) = \frac{1}{2} = 0.5$$

Simpson: $$\int_0^1 x^4\,dx \approx$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$

Trapecio: $$\int_0^1 x^4\,dx \approx \frac{1-0}{2}(0^4 + 1^4) = \frac{1}{2} = 0.5$$

Simpson: $$\int_0^1 x^4\,dx \approx \frac{1-0}{6}\left[0^4 + 4\left(\frac{0+1}{2}\right)^4 + 1^4\right] = \frac{5}{24} = 0.208333$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$

Trapecio: $$\int_0^1 x^4\,dx \approx \frac{1-0}{2}(0^4 + 1^4) = \frac{1}{2} = 0.5$$

Simpson: $$\int_0^1 x^4\,dx \approx \frac{1-0}{6}\left[0^4 + 4\left(\frac{0+1}{2}\right)^4 + 1^4\right] = \frac{5}{24} = 0.208333$$

Valor exacto: $$\int_0^1 x^4\,dx =$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$

Trapecio: $$\int_0^1 x^4\,dx \approx \frac{1-0}{2}(0^4 + 1^4) = \frac{1}{2} = 0.5$$

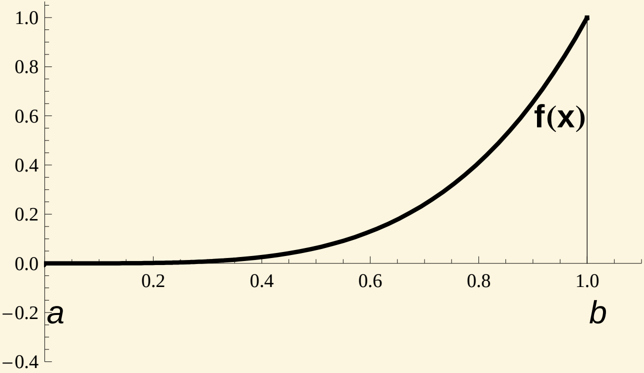
Simpson: $$\int_0^1 x^4\,dx \approx \frac{1-0}{6}\left[0^4 + 4\left(\frac{0+1}{2}\right)^4 + 1^4\right] = \frac{5}{24} = 0.208333$$

Valor exacto: $$\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5} = 0.2$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

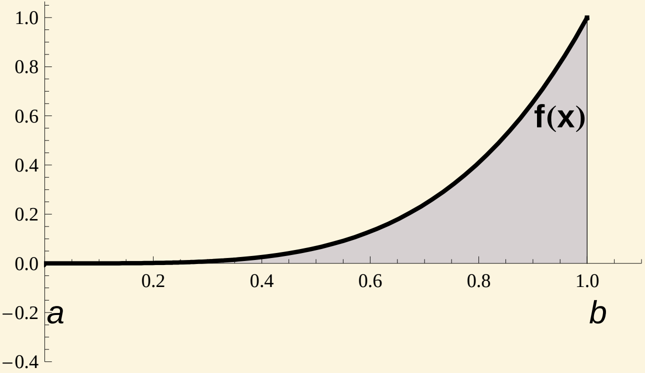
Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

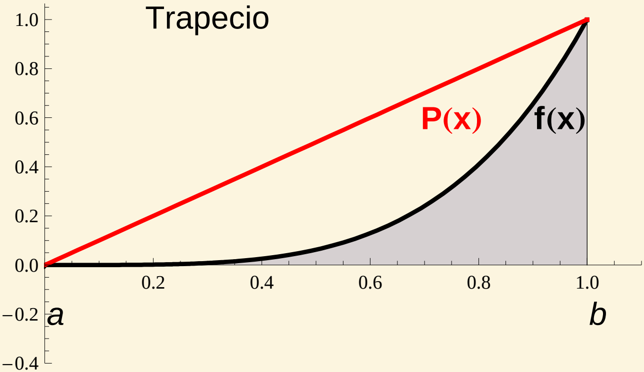
Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

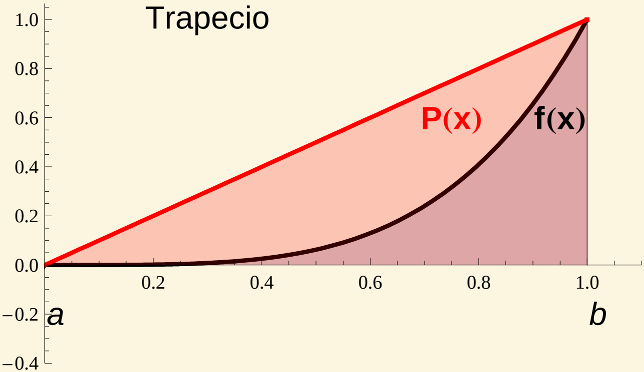
Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$



Fórmula del trapecio: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

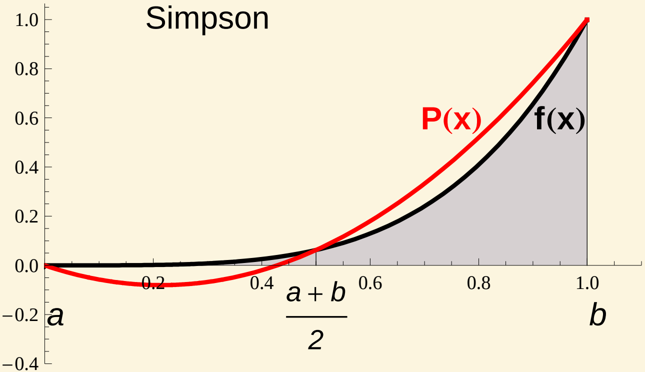
Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

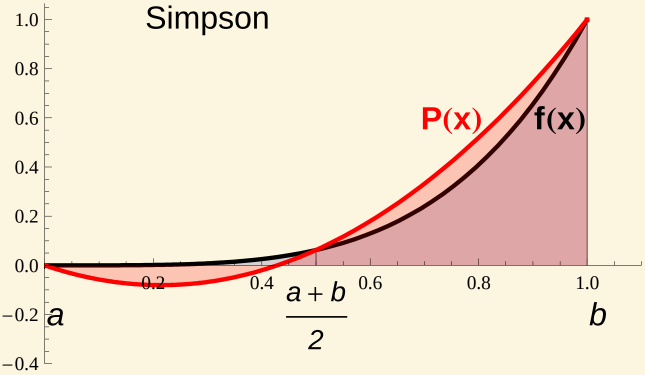
Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$



Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 1: $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 2: $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 2: $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecio:

Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 2: $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecio: $\displaystyle\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx \approx$

Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 2: $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecio: $$\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx \approx \frac{\pi - 0}{2}\big(\text{sen}(0) + \text{sen}(\pi)\big) = 0$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

<u>Solución 2</u>: $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecio: $$\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx \approx \frac{\pi - 0}{2}\big(\text{sen}(0) + \text{sen}(\pi)\big) = 0$$

Simpson:

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 2: $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecio: $$\int_0^\pi \text{sen}(x)\,dx \approx \frac{\pi - 0}{2}\big(\text{sen}(0) + \text{sen}(\pi)\big) = 0$$

Simpson: $$\int_0^\pi \text{sen}(x)\,dx \approx$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 2: $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecio: $$\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx \approx \frac{\pi - 0}{2}\big(\text{sen}(0) + \text{sen}(\pi)\big) = 0$$

Simpson: $$\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx \approx \frac{\pi - 0}{6}\left[\text{sen}(0) + 4\,\text{sen}\left(\frac{0+\pi}{2}\right) + \text{sen}(\pi)\right]$$
$$= \frac{2\pi}{3} = 2.09439$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 2: $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecio: $$\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx \approx \frac{\pi - 0}{2}\big(\text{sen}(0) + \text{sen}(\pi)\big) = 0$$

Simpson: $$\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx \approx \frac{\pi - 0}{6}\left[\text{sen}(0) + 4\,\text{sen}\left(\frac{0+\pi}{2}\right) + \text{sen}(\pi)\right]$$
$$= \frac{2\pi}{3} = 2.09439$$

Valor exacto: $$\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx =$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 2: $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecio: $$\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx \approx \frac{\pi - 0}{2}\big(\text{sen}(0) + \text{sen}(\pi)\big) = 0$$

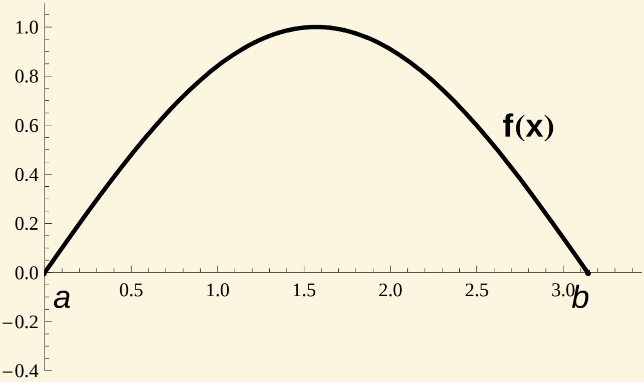
Simpson: $$\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx \approx \frac{\pi - 0}{6}\left[\text{sen}(0) + 4\,\text{sen}\left(\frac{0+\pi}{2}\right) + \text{sen}(\pi)\right]$$
$$= \frac{2\pi}{3} = 2.09439$$

Valor exacto: $$\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx = 2$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

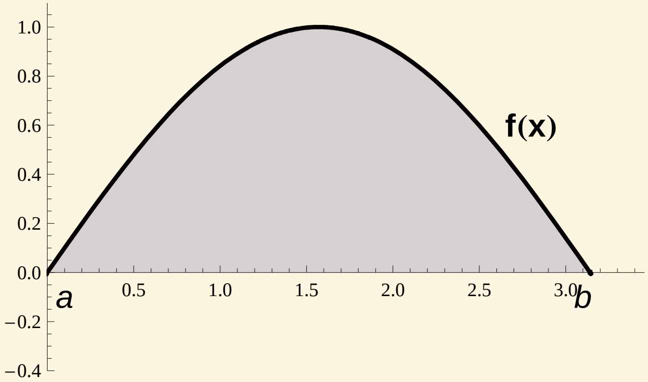
Solución 2: $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$



Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

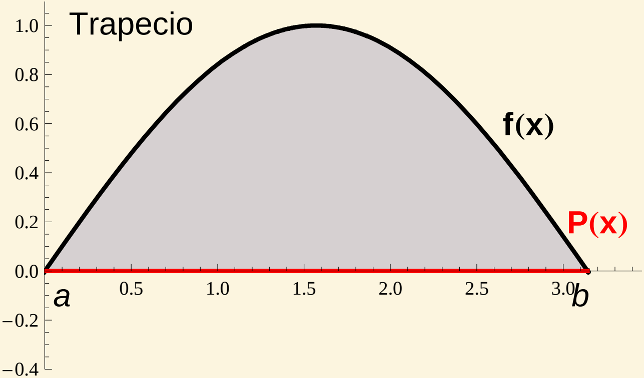
Solución 2: $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

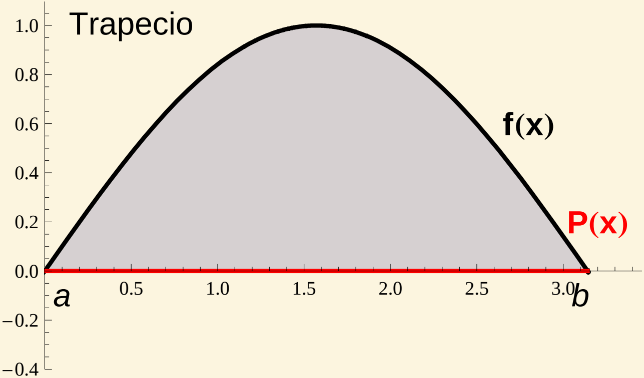
Solución 2: $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$



Fórmula del trapecio: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

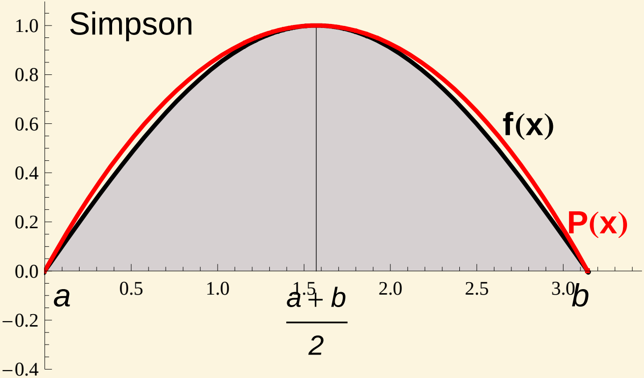
Solución 2: $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

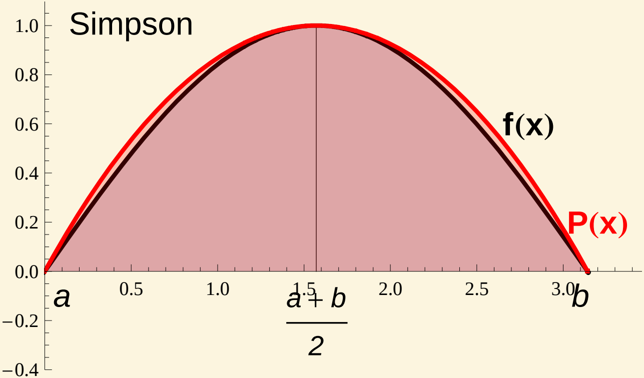
Solución 2: $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 2: $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$

Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$

Trapecio:

Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$

Trapecio: $\displaystyle\int_2^3 x^2 e^{-x}\, dx \approx$

Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$

Trapecio: $$\int_2^3 x^2 e^{-x}\, dx \approx \frac{3-2}{2}\left(2^2 e^{-2} + 3^2 e^{-3}\right) = 0.494712$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$

Trapecio: $$\int_2^3 x^2 e^{-x}\, dx \approx \frac{3-2}{2}\left(2^2 e^{-2} + 3^2 e^{-3}\right) = 0.494712$$

Simpson:

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$

Trapecio: $$\int_2^3 x^2 e^{-x}\,dx \approx \frac{3-2}{2}\left(2^2 e^{-2} + 3^2 e^{-3}\right) = 0.494712$$

Simpson:

$$\int_2^3 x^2 e^{-x}\,dx \approx$$

Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$

Trapecio: $$\int_2^3 x^2 e^{-x}\, dx \approx \frac{3-2}{2}\left(2^2 e^{-2} + 3^2 e^{-3}\right) = 0.494712$$

Simpson:

$$\int_2^3 x^2 e^{-x}\, dx \approx \frac{3-2}{6}\left[2^2 e^{-2} + 4\left(\left(\frac{2+3}{2}\right)^2 e^{-\left(\frac{2+3}{2}\right)}\right) + 3^2 e^{-3}\right]$$
$$= 0.506925$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$

Trapecio: $$\int_2^3 x^2 e^{-x}\,dx \approx \frac{3-2}{2}\left(2^2 e^{-2} + 3^2 e^{-3}\right) = 0.494712$$

Simpson:

$$\int_2^3 x^2 e^{-x}\,dx \approx \frac{3-2}{6}\left[2^2 e^{-2} + 4\left(\left(\frac{2+3}{2}\right)^2 e^{-\left(\frac{2+3}{2}\right)}\right) + 3^2 e^{-3}\right]$$
$$= 0.506925$$

Valor exacto: $\int_2^3 x^2 e^{-x}\,dx =$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$

Trapecio: $$\int_2^3 x^2 e^{-x}\, dx \approx \frac{3-2}{2}\left(2^2 e^{-2} + 3^2 e^{-3}\right) = 0.494712$$

Simpson:

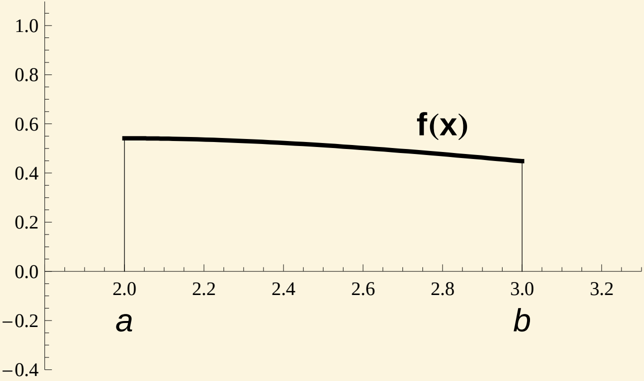
$$\int_2^3 x^2 e^{-x}\, dx \approx \frac{3-2}{6}\left[2^2 e^{-2} + 4\left(\left(\frac{2+3}{2}\right)^2 e^{-\left(\frac{2+3}{2}\right)}\right) + 3^2 e^{-3}\right]$$
$$= 0.506925$$

Valor exacto: $$\int_2^3 x^2 e^{-x}\, dx = e^{-x}(-2-2x-x^2)\Big|_2^3 = \frac{-17}{e^3} + \frac{10}{e^2} = 0.506973$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

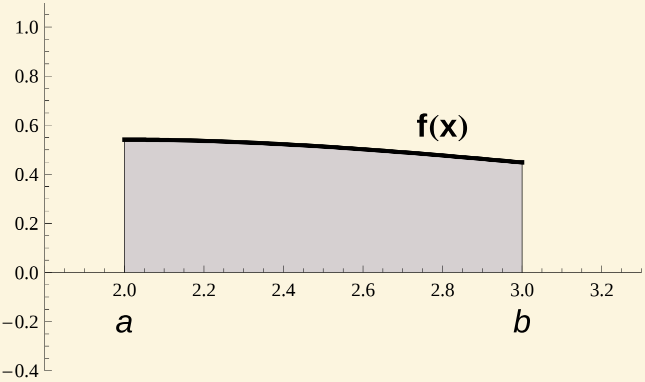
Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

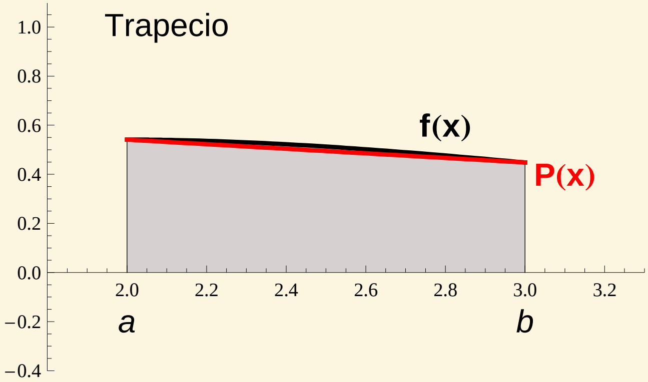
Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$



Fórmula del trapecio: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

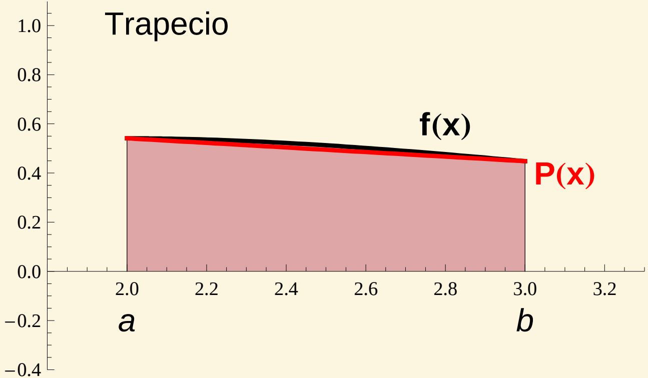
Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$



Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

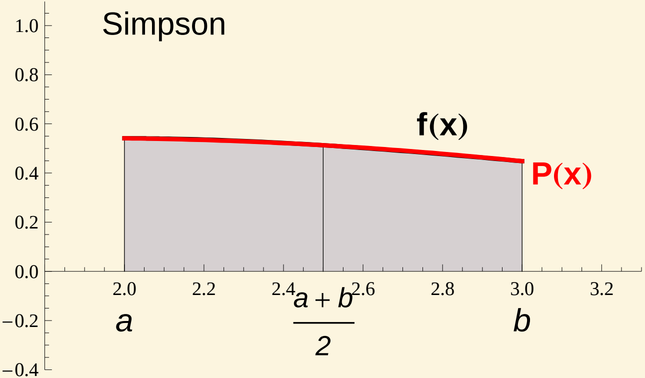
Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

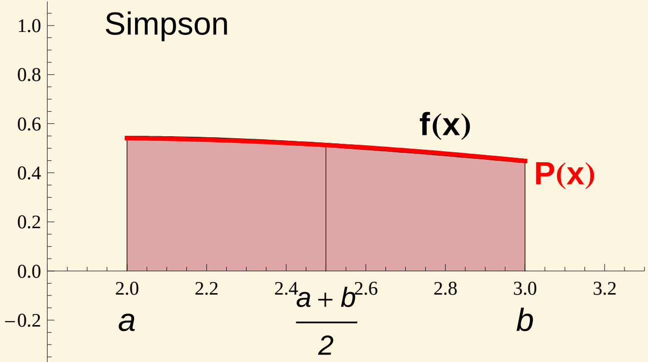
Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 4: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 4: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecio:

Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 4: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecio: $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos(x)\, dx \approx$

Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 4: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecio: $$\int_0^\pi e^x \cos(x)\, dx \approx \frac{\pi - 0}{2}\left(e^0 \cos(0) + e^\pi \cos(\pi)\right) = -34.7785$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

<u>Solución 4</u>: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecio: $$\int_0^\pi e^x \cos(x)\, dx \approx \frac{\pi - 0}{2}\left(e^0 \cos(0) + e^\pi \cos(\pi)\right) = -34.7785$$

Simpson:

Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 4: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a,b] = [0,\pi]$

Trapecio: $$\int_0^\pi e^x \cos(x)\,dx \approx \frac{\pi - 0}{2}\left(e^0\cos(0) + e^\pi \cos(\pi)\right) = -34.7785$$

Simpson:

$$\int_0^\pi e^x \cos(x)\,dx \approx$$

Fórmula del trapecio: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 4: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecio: $$\int_0^{\pi} e^x \cos(x)\, dx \approx \frac{\pi - 0}{2}\left(e^0 \cos(0) + e^{\pi} \cos(\pi)\right) = -34.7785$$

Simpson:

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(x)\, dx \approx \frac{\pi - 0}{6}\left[e^0 \cos(0) + 4\left(e^{\frac{0+\pi}{2}} \cos\left(\frac{0+\pi}{2}\right)\right) + e^{\pi} \cos(\pi)\right]$$
$$= -11.5928$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Solución 4: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a,b] = [0,\pi]$

Trapecio: $$\int_0^\pi e^x \cos(x)\,dx \approx \frac{\pi-0}{2}\left(e^0\cos(0) + e^\pi \cos(\pi)\right) = -34.7785$$

Simpson:

$$\int_0^\pi e^x \cos(x)\,dx \approx \frac{\pi-0}{6}\left[e^0\cos(0) + 4\left(e^{\frac{0+\pi}{2}}\cos\left(\frac{0+\pi}{2}\right)\right) + e^\pi\cos(\pi)\right]$$
$$= -11.5928$$

Valor exacto: $\int_0^\pi e^x \cos(x)\,dx =$

Fórmula del trapecio: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Solución 4: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecio: $$\int_0^\pi e^x \cos(x)\, dx \approx \frac{\pi - 0}{2}\left(e^0 \cos(0) + e^\pi \cos(\pi)\right) = -34.7785$$

Simpson:

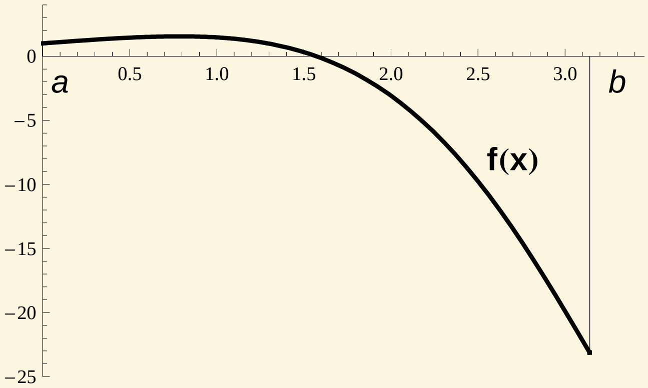
$$\int_0^\pi e^x \cos(x)\, dx \approx \frac{\pi - 0}{6}\left[e^0 \cos(0) + 4\left(e^{\frac{0+\pi}{2}} \cos\left(\frac{0+\pi}{2}\right)\right) + e^\pi \cos(\pi)\right]$$
$$= -11.5928$$

Valor exacto: $$\int_0^\pi e^x \cos(x)\, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \operatorname{sen} x)\Big|_0^\pi = -12.0703$$

Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

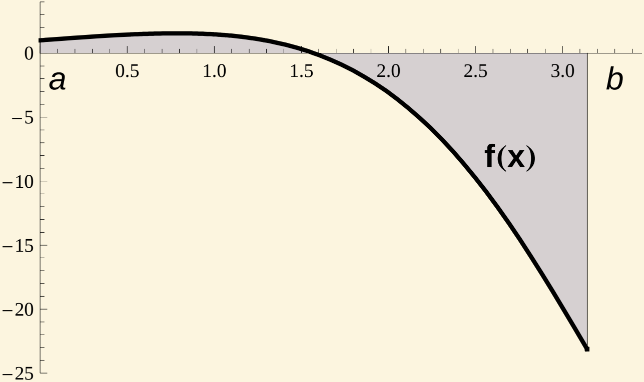
Solución 4: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

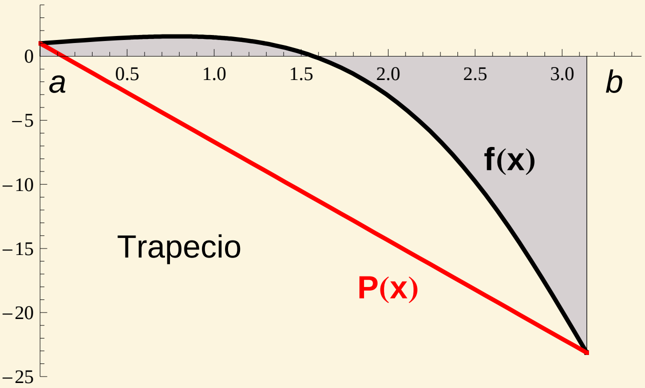
Solución 4: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

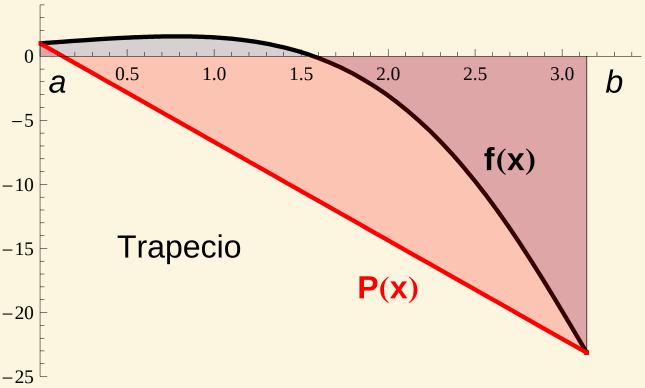
Solución 4: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

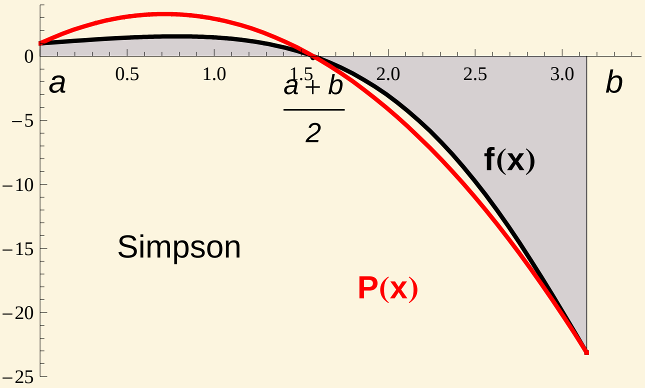
Solución 4: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$



Fórmula del trapecio: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

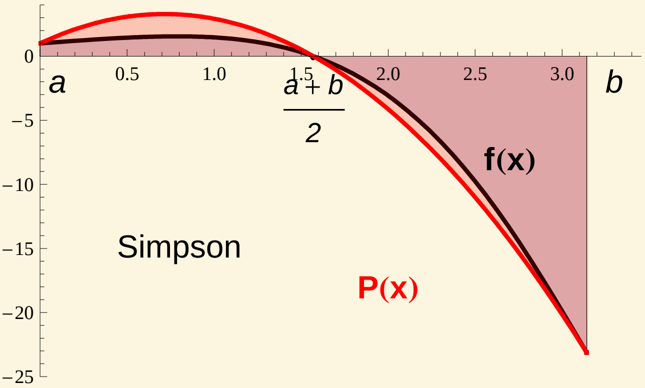
Solución 4: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$



Fórmula del trapecio: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

Fórmula de Simpson: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

Solución 4: $f(x) = e^x \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$



Fórmula del trapecio: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

Fórmula de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

El error en las fórmulas del trapecio y de Simpson

1) Con la fórmula del trapecio aproximamos $\int_a^b f(x)\,dx$ como

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

El error en las fórmulas del trapecio y de Simpson

1) Con la fórmula del trapecio aproximamos $\int_a^b f(x)\,dx$ como

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

Puede demostrarse que si $f(x)$ es una función de clase 2 en $[a,b]$ entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

es decir, el error que se comete con esa aproximación es $\left|\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)\right|$.

El error en las fórmulas del trapecio y de Simpson

1) Con la fórmula del trapecio aproximamos $\int_a^b f(x)\,dx$ como

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

Puede demostrarse que si $f(x)$ es una función de clase 2 en $[a,b]$ entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$$

es decir, el error que se comete con esa aproximación es $\left|\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)\right|$.

<u>Ejemplo</u>: Considerar $f(x)=x^3$. Entonces, $f''(x)=6x$. Si aproximamos $\int_0^1 x^3\,dx$ con la fórmula del trapecio sabemos que vamos a cometer un error $\left|\frac{(1-0)^3}{12}f''(\xi)\right| = \left|\frac{6\xi}{12}\right| = \left|\frac{\xi}{2}\right| = \frac{\xi}{2} < \frac{1}{2}$, pues $\xi \in (0,1)$.

El error en las fórmulas del trapecio y de Simpson

1) Con la fórmula del trapecio aproximamos $\int_a^b f(x)\,dx$ como

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

Puede demostrarse que si $f(x)$ es una función de clase 2 en $[a,b]$ entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

es decir, el error que se comete con esa aproximación es $\left|\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)\right|$.

Ejemplo: Considerar $f(x)=x^3$. Entonces, $f''(x)=6x$. Si aproximamos $\int_0^1 x^3\,dx$ con la fórmula del trapecio sabemos que vamos a cometer un error $\left|\frac{(1-0)^3}{12} f''(\xi)\right| = \left|\frac{6\xi}{12}\right| = \left|\frac{\xi}{2}\right| = \frac{\xi}{2} < \frac{1}{2}$, pues $\xi \in (0,1)$. En efecto,

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}, \quad \frac{1-0}{2}\big(f(0)+f(1)\big) = \frac{1}{2}(0^3+1^3) = \frac{1}{2},$$ con lo que el error es $\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

2) Con la fórmula de Simpson aproximamos $\int_a^b f(x)\,dx$ como

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

2) Con la fórmula de Simpson aproximamos $\int_a^b f(x)\,dx$ como

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Puede demostrarse que si $f(x)$ es una función de clase 4 en $[a,b]$ entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{4)}(\xi)$$

es decir, el error que se comete con esa aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{2880} f^{4)}(\xi)\right|$.

2) Con la fórmula de Simpson aproximamos $\int_a^b f(x)\,dx$ como

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Puede demostrarse que si $f(x)$ es una función de clase 4 en $[a, b]$ entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{4)}(\xi)$$

es decir, el error que se comete con esa aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{2880} f^{4)}(\xi)\right|$.

Ejemplo: Considerar $f(x) = x^3$. Entonces, $f^{4)}(x) \equiv 0$. Si aproximamos $\int_0^1 x^3\,dx$ con la fórmula de Simpson sabemos que vamos a cometer un error $\left|\frac{(1-0)^5}{2880} f^{4)}(\xi)\right| = \left|\frac{1}{2880} 0\right| = 0$.

2) Con la fórmula de Simpson aproximamos $\int_a^b f(x)\,dx$ como

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

Puede demostrarse que si $f(x)$ es una función de clase 4 en $[a,b]$ entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{4)}(\xi)$$

es decir, el error que se comete con esa aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{2880}f^{4)}(\xi)\right|$.

Ejemplo: Considerar $f(x)=x^3$. Entonces, $f^{4)}(x)\equiv 0$. Si aproximamos $\int_0^1 x^3\,dx$ con la fórmula de Simpson sabemos que vamos a cometer un error $\left|\frac{(1-0)^5}{2880}f^{4)}(\xi)\right| = \left|\frac{1}{2880}0\right| = 0$. En efecto,

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}, \quad \frac{1-0}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right] = \frac{1}{6}\left[0^3+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+1^3\right] = \frac{1}{4},$$

con lo que la fórmula es exacta en este caso. Obsérvese que si $f(x)$ es cualquier polinomio de grado ≤ 3, ocurre lo mismo, pues $f^{4)}(x)\equiv 0$.

El error en alguno de los ejercicios del principio:

1) $f(x) = x^4$, $[a, b] = [0, 1]$

Trapecios: $\displaystyle\int_0^1 x^4\, dx = \frac{1}{5} \approx \frac{1-0}{2}(0^4 + 1^4) = \frac{1}{2}$

Como $f''(x) = 12x^2$, sabemos que Error$=\left|\frac{(1-0)^3}{12}12\xi^2\right| = \xi^2 < 1$ pues $\xi \in (0, 1)$. Efectivamente, $\left|\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{10} < 1$.

Simpson: $\displaystyle\int_0^1 x^4\, dx = \frac{1}{5} \approx \frac{1-0}{6}\left[0^4 + 4\left(\frac{0+1}{2}\right)^4 + 1^4\right] = \frac{5}{24}$

Como $f^{4)}(x) = 24$, sabemos que Error$=\left|\frac{(1-0)^5}{2880}24\right| = \frac{1}{120}$. Por tanto en este caso sabemos exactamente el error cometido.
Efectivamente, $\left|\frac{1}{5} - \frac{5}{24}\right| = \frac{1}{120}$.

T: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$, Error$=\left|\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)\right|$, $\xi \in (a, b)$

S: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$, Error$=\left|\frac{(b-a)^5}{2880}f^{4)}(\xi)\right|$, $\xi \in (a, b)$

2) $f(x) = \text{sen}(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$

Trapecios: $\displaystyle\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx = 2 \approx \frac{\pi - 0}{2}\big(\text{sen}(0) + \text{sen}(\pi)\big) = 0$

Como $f''(x) = -\text{sen}(x)$, sabemos que

Error$=\left|\frac{(\pi-0)^3}{12}(-\text{sen}(\xi))\right| = \frac{\pi^3}{12}|\text{sen}(\xi)| \leq \frac{\pi^3}{12}$, pues $|\text{sen}(x)| \leq 1$ para $x \in (0, \pi)$. Efectivamente, $\big|2 - 0\big| = 2 \leq \frac{\pi^3}{12} = 2.58386.$

Simpson: $\displaystyle\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx = 2 \approx \frac{\pi - 0}{6}\left[\text{sen}(0) + 4\,\text{sen}\left(\frac{0+\pi}{2}\right) + \text{sen}(\pi)\right] = \frac{2\pi}{3}$

Como $f^{4)}(x) = \text{sen}(x)$, sabemos que

Error$=\left|\frac{(\pi-0)^5}{2880}\text{sen}(\xi)\right| = \frac{\pi^5}{2880}|\text{sen}(\xi)| \leq \frac{\pi^5}{2880} = 0.106257.$

Efectivamente, $\left|2 - \frac{2\pi}{3}\right| = \frac{2\pi-6}{3} = 0.0943951 \leq 0.106257.$

T: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$, Error$=\left|\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)\right|$, $\xi \in (a, b)$

S: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$, Error$=\left|\frac{(b-a)^5}{2880}f^{4)}(\xi)\right|$, $\xi \in (a, b)$

3) $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[a, b] = [2, 3]$. Este caso es más complicado. Solo lo veremos para la fórmula del trapecio:

$$\int_2^3 x^2 e^{-x}\, dx = 0.506973 \approx \frac{3-2}{2}\left(2^2 e^{-2} + 3^2 e^{-3}\right) = 0.494712$$

En esta caso $f''(x) = e^{-x}(2-4x+x^2)$, con lo que Error$=\left|\frac{(3-2)^3}{12} f''(\xi)\right| = \frac{1}{12}|f''(\xi)|$, con $\xi \in (2, 3)$. Veamos como es la función $|f''(x)|$.

Sea $g_1(x) = 2 - 4x + x^2$. Como $g_1'(x) = 2(x-2) \geq 0$ para $x \in [2, 3]$, resulta que $g_1(x)$ es creciente en ese intervalo, con lo que $g_1(x) \leq g_1(3) = -1$, si $x \in [2, 3]$. Por tanto, $|f''(x)| = -f''(x)$ si $x \in [2, 3]$.

Sea $g_2(x) = -f''(x) = -e^{-x}(2 - 4x + x^2)$. Entonces $g_2'(x) = e^{-x}(6 - 6x + x^2)$. Sea $g_3(x) = 6 - 6x + x^2$. Como $g_3'(x) = 2(x-3) \leq 2(3-3) = 0$ si $x \in [2, 3]$, resulta que $g_3(x)$ es decreciente en $[2, 3]$. Por tanto, $g_3(x) \leq g_3(2) = -2 < 0$ si $x \in [2, 3]$. Por tanto $g_2'(x) < 0$ en $[2, 3]$, con lo que $g_2(x)$ es decreciente en ese intervalo. Por consiguiente, $|f''(\xi)| = -f''(\xi) = g_2(\xi) \leq g_2(2) = 2e^{-2}$ si $\xi \in (2, 3)$, con lo que Error$= \frac{|f''(\xi)|}{12} = \frac{g_2(\xi)}{12} \leq \frac{g_2(2)}{12} = \frac{2e^{-2}}{12} = 0.0225559$.

Efectivamente, $|0.506973 - 0.494712| = 0.012261 < 0.0225559$.

T: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$, Error$=\left|\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)\right|$, $\xi \in (a, b)$