Cálculo Numérico y Estadística

Primera parte: Cálculo Numérico

José Luis Bravo

Curso 2019/2020
Segundo semestre

Fórmulas de cuadratura compuesta

Para aumentar el grado de exactitud de las formulas de cuadratura que hemos visto podría pensarse en aumentar el grado del polinomio de interpolación en el que se basan. Sin embargo, como vimos en el tema sobre interpolación, aumentar el grado del polinomio no siempre garantiza que la aproximación sea mejor. Para solventar ese problema, vimos que podíamos recurrir a la interpolación polinómica segmentaria. Con esa misma idea, $\int_a^b f(x)\,dx$ se aproximará con $\int_a^b g(x)\,dx$, siendo $g(x)$ una función polinómica "a trozos", de bajo grado. Las fórmulas a que da lugar esta técnica se llaman "fórmulas de integración (o cuadratura) compuestas".

Fórmulas de cuadratura compuesta

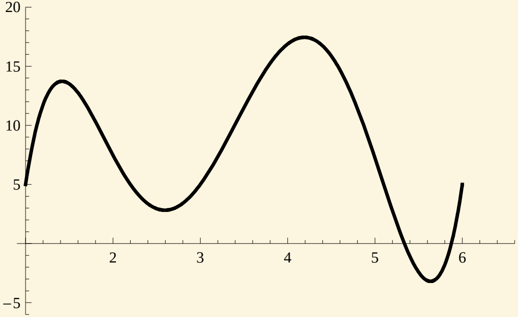
Para aumentar el grado de exactitud de las formulas de cuadratura que hemos visto podría pensarse en aumentar el grado del polinomio de interpolación en el que se basan. Sin embargo, como vimos en el tema sobre interpolación, aumentar el grado del polinomio no siempre garantiza que la aproximación sea mejor. Para solventar ese problema, vimos que podíamos recurrir a la interpolación polinómica segmentaria. Con esa misma idea, $\int_a^b f(x)\,dx$ se aproximará con $\int_a^b g(x)\,dx$, siendo $g(x)$ una función polinómica "a trozos", de bajo grado. Las fórmulas a que da lugar esta técnica se llaman "fórmulas de integración (o cuadratura) compuestas".

Consideremos el intervalo $[a, b]$ dividido en N trozos mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante una regla compuesta consiste, simplemente, en aproximar cada $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ mediante una fórmula de cuadratura de bajo grado, como trapecios o Simpson.

Fórmulas de cuadratura compuesta

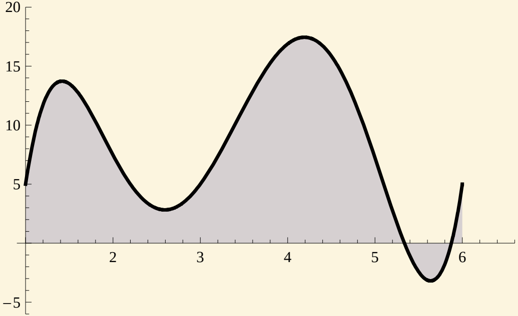


Consideremos el intervalo $[a, b]$ dividido en N trozos mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante una regla compuesta consiste, simplemente, en aproximar cada $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ mediante una fórmula de cuadratura de bajo grado, como trapecios o Simpson.

Fórmulas de cuadratura compuesta

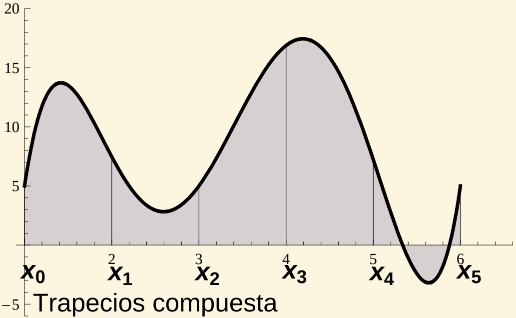


Consideremos el intervalo $[a, b]$ dividido en N trozos mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante una regla compuesta consiste, simplemente, en aproximar cada $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ mediante una fórmula de cuadratura de bajo grado, como trapecios o Simpson.

Fórmulas de cuadratura compuesta

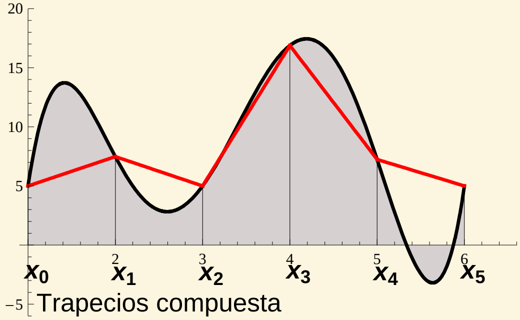


Consideremos el intervalo $[a,b]$ dividido en N trozos mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante una regla compuesta consiste, simplemente, en aproximar cada $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ mediante una fórmula de cuadratura de bajo grado, como trapecios o Simpson.

Fórmulas de cuadratura compuesta

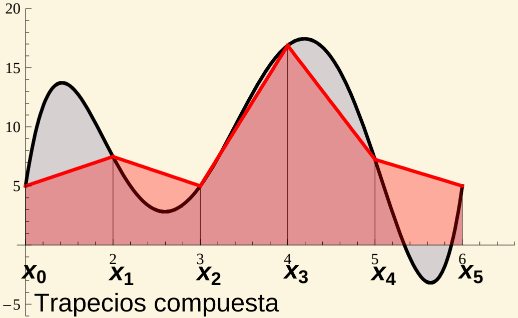


Consideremos el intervalo $[a,b]$ dividido en N trozos mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante una regla compuesta consiste, simplemente, en aproximar cada $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ mediante una fórmula de cuadratura de bajo grado, como trapecios o Simpson.

Fórmulas de cuadratura compuesta

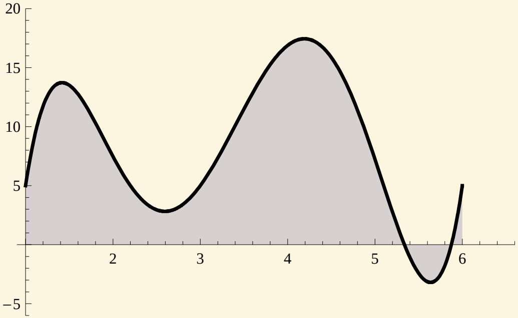


Consideremos el intervalo $[a, b]$ dividido en N trozos mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante una regla compuesta consiste, simplemente, en aproximar cada $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ mediante una fórmula de cuadratura de bajo grado, como trapecios o Simpson.

Fórmulas de cuadratura compuesta

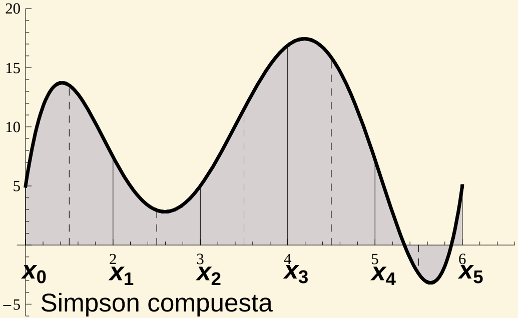


Consideremos el intervalo $[a, b]$ dividido en N trozos mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante una regla compuesta consiste, simplemente, en aproximar cada $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ mediante una fórmula de cuadratura de bajo grado, como trapecios o Simpson.

Fórmulas de cuadratura compuesta

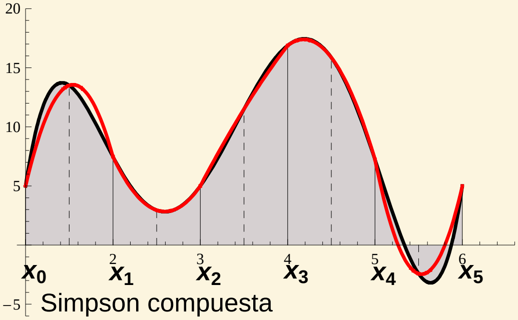


Consideremos el intervalo $[a, b]$ dividido en N trozos mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante una regla compuesta consiste, simplemente, en aproximar cada $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ mediante una fórmula de cuadratura de bajo grado, como trapecios o Simpson.

Fórmulas de cuadratura compuesta

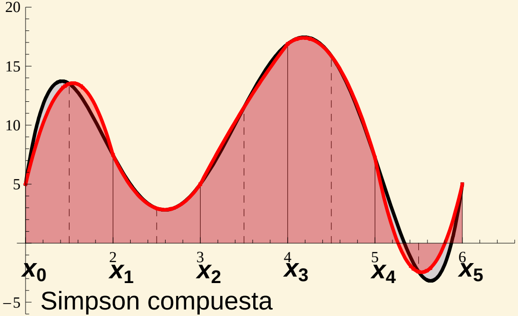


Consideremos el intervalo $[a, b]$ dividido en N trozos mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante una regla compuesta consiste, simplemente, en aproximar cada $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ mediante una fórmula de cuadratura de bajo grado, como trapecios o Simpson.

Fórmulas de cuadratura compuesta



Consideremos el intervalo $[a, b]$ dividido en N trozos mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante una regla compuesta consiste, simplemente, en aproximar cada $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ mediante una fórmula de cuadratura de bajo grado, como trapecios o Simpson.

Fórmula de los trapecios compuesta: Sea $f(x)$ una función definida en $[a, b]$. Consideremos los puntos x_i igualmente espaciados, es decir, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, siendo $h = \frac{b-a}{N}$. Si aplicamos la fórmula del trapecio a cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, tenemos

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big) = \frac{h}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big)$$

Fórmula de los trapecios compuesta: Sea $f(x)$ una función definida en $[a,b]$. Consideremos los puntos x_i igualmente espaciados, es decir, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, siendo $h = \frac{b-a}{N}$. Si aplicamos la fórmula del trapecio a cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, tenemos

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\big(f(x_i)+f(x_{i+1})\big) = \frac{h}{2}\big(f(x_i)+f(x_{i+1})\big)$$

Teniendo en cuenta que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$

Fórmula de los trapecios compuesta: Sea $f(x)$ una función definida en $[a, b]$. Consideremos los puntos x_i igualmente espaciados, es decir, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, siendo $h = \frac{b-a}{N}$. Si aplicamos la fórmula del trapecio a cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, tenemos

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big) = \frac{h}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big)$$

Teniendo en cuenta que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ se obtiene la *Fórmula de los Trapecios Compuesta*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right]$$

Fórmula de los trapecios compuesta: Sea $f(x)$ una función definida en $[a, b]$. Consideremos los puntos x_i igualmente espaciados, es decir, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, siendo $h = \frac{b-a}{N}$. Si aplicamos la fórmula del trapecio a cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, tenemos

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big) = \frac{h}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big)$$

Teniendo en cuenta que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ se obtiene la *Fórmula de los Trapecios Compuesta*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right]$$

Si f es de clase 2 en $[a, b]$, entonces existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right] - \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de los trapecios compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx$, cometiendo un error menor que 0.5.

Trapecios compuesta:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right],$$

$h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$

Error: $\left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de los trapecios compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$, cometiendo un error menor que 0.5. Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left| \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta) \right|$.

Trapecios compuesta:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h\left[\frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right],$$

$h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$

Error: $\left| \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta) \right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de los trapecios compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$, cometiendo un error menor que 0.5. Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left| \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta) \right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 0.5$, sin saber quien es η.

Trapecios compuesta:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h\left[\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right],$$

$h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$

Error: $\left| \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta) \right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de los trapecios compuesta para aproximar la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$, cometiendo un error menor que 0.5. Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left| \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta) \right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 0.5$, sin saber quien es η. Tenemos que $E = \left| \frac{\pi^3}{12N^2} (-\operatorname{sen} \eta) \right| = \left| \frac{\pi^3}{12N^2} \right| \left| -\operatorname{sen} \eta \right| \leq \frac{\pi^3}{12N^2}$. Por tanto, será suficiente elegir N tal que $\frac{\pi^3}{12N^2} < 0.5$. Es decir, $N >$

Trapecios compuesta:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx h \left[\frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right],$$

$h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$

Error: $\left| \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta) \right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de los trapecios compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$, cometiendo un error menor que 0.5. Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left| \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta) \right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 0.5$, sin saber quien es η. Tenemos que $E = \left| \frac{\pi^3}{12N^2}(-\operatorname{sen}\eta) \right| = \left| \frac{\pi^3}{12N^2} \right| \left| -\operatorname{sen}\eta \right| \leq \frac{\pi^3}{12N^2}$. Por tanto, será suficiente elegir N tal que $\frac{\pi^3}{12N^2} < 0.5$. Es decir, $N > \sqrt{\frac{\pi^3}{12 \cdot 0.5}} = 2.27326$. Tomo $N =$

Trapecios compuesta:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h\left[\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right],$$

$h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$

Error: $\left| \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta) \right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de los trapecios compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$, cometiendo un error menor que 0.5. Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 0.5$, sin saber quien es η. Tenemos que $E = \left|\frac{\pi^3}{12N^2}(-\operatorname{sen}\eta)\right| = \left|\frac{\pi^3}{12N^2}\right| \left|-\operatorname{sen}\eta\right| \leq \frac{\pi^3}{12N^2}$. Por tanto, será suficiente elegir N tal que $\frac{\pi^3}{12N^2} < 0.5$. Es decir, $N > \sqrt{\frac{\pi^3}{12 \cdot 0.5}} = 2.27326$. Tomo $N = 3$. Aplico la fórmula: $h =$

Trapecios compuesta:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h\left[\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right],$$

$h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$

Error: $\left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de los trapecios compuesta para aproximar la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$, cometiendo un error menor que 0.5. Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left| \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta) \right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 0.5$, sin saber quien es η. Tenemos que $E = \left| \frac{\pi^3}{12N^2} (-\operatorname{sen} \eta) \right| = \left| \frac{\pi^3}{12N^2} \right| \left| -\operatorname{sen} \eta \right| \leq \frac{\pi^3}{12N^2}$. Por tanto, será suficiente elegir N tal que $\frac{\pi^3}{12N^2} < 0.5$. Es decir, $N > \sqrt{\frac{\pi^3}{12 \cdot 0.5}} = 2.27326$. Tomo $N = 3$. Aplico la fórmula: $h = \frac{\pi}{3}$, $x_0 =$

Trapecios compuesta:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx h \left[\frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right],$$

$h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$

Error: $\left| \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta) \right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de los trapecios compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$, cometiendo un error menor que 0.5. Sabemos que existe $\eta \in (0,\pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 0.5$, sin saber quien es η. Tenemos que $E = \left|\frac{\pi^3}{12N^2}(-\operatorname{sen}\eta)\right| = \left|\frac{\pi^3}{12N^2}\right| \left|-\operatorname{sen}\eta\right| \leq \frac{\pi^3}{12N^2}$. Por tanto, será suficiente elegir N tal que $\frac{\pi^3}{12N^2} < 0.5$. Es decir, $N > \sqrt{\frac{\pi^3}{12\cdot 0.5}} = 2.27326$. Tomo $N = 3$. Aplico la fórmula: $h = \frac{\pi}{3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \pi$.

Trapecios compuesta:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h\left[\frac{1}{2}(f(a)+f(b)) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right],$$

$h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$

Error: $\left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de los trapecios compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$, cometiendo un error menor que 0.5. Sabemos que existe $\eta \in (0,\pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 0.5$, sin saber quien es η. Tenemos que $E = \left|\frac{\pi^3}{12N^2}(-\operatorname{sen}\eta)\right| = \left|\frac{\pi^3}{12N^2}\right|\left|-\operatorname{sen}\eta\right| \leq \frac{\pi^3}{12N^2}$. Por tanto, será suficiente elegir N tal que $\frac{\pi^3}{12N^2} < 0.5$. Es decir, $N > \sqrt{\frac{\pi^3}{12\cdot 0.5}} = 2.27326$. Tomo $N = 3$. Aplico la fórmula: $h = \frac{\pi}{3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \pi$.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx \approx \frac{\pi - 0}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen}\pi\right) + \sum_{i=1}^{3-1} \operatorname{sen} x_i\right] =$$

Trapecios compuesta:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h\left[\frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right],$$

$h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$

Error: $\left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de los trapecios compuesta para aproximar la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$, cometiendo un error menor que 0.5. Sabemos que existe $\eta \in (0,\pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 0.5$, sin saber quien es η. Tenemos que $E = \left|\frac{\pi^3}{12N^2}(-\operatorname{sen}\eta)\right| = \left|\frac{\pi^3}{12N^2}\right|\left|-\operatorname{sen}\eta\right| \leq \frac{\pi^3}{12N^2}$. Por tanto, será suficiente elegir N tal que $\frac{\pi^3}{12N^2} < 0.5$. Es decir, $N > \sqrt{\frac{\pi^3}{12\cdot 0.5}} = 2.27326$. Tomo $N = 3$. Aplico la fórmula: $h = \frac{\pi}{3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \pi$.

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx \approx \frac{\pi - 0}{3}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen}\pi) + \sum_{i=1}^{3-1} \operatorname{sen} x_i\right] =$$

$$\frac{\pi}{3}(\operatorname{sen} x_1 + \operatorname{sen} x_2) =$$

Trapecios compuesta:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h\left[\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right],$$

$h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$

Error: $\left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de los trapecios compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$, cometiendo un error menor que 0.5. Sabemos que existe $\eta \in (0,\pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 0.5$, sin saber quien es η. Tenemos que $E = \left|\frac{\pi^3}{12N^2}(-\operatorname{sen}\eta)\right| = \left|\frac{\pi^3}{12N^2}\right|\left|-\operatorname{sen}\eta\right| \leq \frac{\pi^3}{12N^2}$. Por tanto, será suficiente elegir N tal que $\frac{\pi^3}{12N^2} < 0.5$. Es decir, $N > \sqrt{\frac{\pi^3}{12\cdot 0.5}} = 2.27326$. Tomo $N = 3$. Aplico la fórmula: $h = \frac{\pi}{3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \pi$.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx \approx \frac{\pi - 0}{3}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen}\pi) + \sum_{i=1}^{3-1} \operatorname{sen} x_i\right] =$$

$$\frac{\pi}{3}(\operatorname{sen} x_1 + \operatorname{sen} x_2) = \frac{\pi}{3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1.8138.$$

Trapecios compuesta:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h\left[\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right],$$

$h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$

Error: $\left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de los trapecios compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$, cometiendo un error menor que 0.5. Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 0.5$, sin saber quien es η. Tenemos que $E = \left|\frac{\pi^3}{12N^2}(-\operatorname{sen}\eta)\right| = \left|\frac{\pi^3}{12N^2}\right| \left|-\operatorname{sen}\eta\right| \leq \frac{\pi^3}{12N^2}$. Por tanto, será suficiente elegir N tal que $\frac{\pi^3}{12N^2} < 0.5$. Es decir, $N > \sqrt{\frac{\pi^3}{12 \cdot 0.5}} = 2.27326$. Tomo $N = 3$. Aplico la fórmula: $h = \frac{\pi}{3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \pi$.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx \approx \frac{\pi - 0}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen}\pi\right) + \sum_{i=1}^{3-1} \operatorname{sen} x_i\right] =$$

$$\frac{\pi}{3}(\operatorname{sen} x_1 + \operatorname{sen} x_2) = \frac{\pi}{3}\left(\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\tfrac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1.8138.$$

El valor exacto es $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = 2$, con lo que

$\left|\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx - 1.8138\right| = 0.1862 < 0.5$, como deseábamos.

Fórmula de Simpson compuesta: Sea $f(x)$ una función definida en $[a, b]$. Consideremos los puntos x_i igualmente espaciados, es decir, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, siendo $h = \frac{b-a}{N}$. Supondremos, además, que N es par. Si aplicamos la fórmula de Simpson a cada intervalo $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, $i = 0, 1, \ldots, (\frac{N}{2} - 1)$, (es decir, $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ..., $[x_{N-2}, x_N]$), tenemos

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx \approx \frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{6}\left[f(x_{2i}) + 4f\left(\frac{x_{2i} + x_{2i+2}}{2}\right) + f(x_{2i+2})\right]$$

$$= \frac{h}{3}\big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\big)$$

Fórmula de Simpson compuesta: Sea $f(x)$ una función definida en $[a, b]$. Consideremos los puntos x_i igualmente espaciados, es decir, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, siendo $h = \frac{b-a}{N}$. Supondremos, además, que N es par. Si aplicamos la fórmula de Simpson a cada intervalo $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, $i = 0, 1, \ldots, (\frac{N}{2} - 1)$, (es decir, $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, $\ldots$, $[x_{N-2}, x_N]$), tenemos

$$\begin{aligned}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx &\approx \frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{6}\left[f(x_{2i}) + 4f\left(\frac{x_{2i} + x_{2i+2}}{2}\right) + f(x_{2i+2})\right] \\ &= \frac{h}{3}\left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right)\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{N-2}}^{x_N} f(x)\,dx$$

Fórmula de Simpson compuesta: Sea $f(x)$ una función definida en $[a, b]$. Consideremos los puntos x_i igualmente espaciados, es decir, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, siendo $h = \frac{b-a}{N}$. Supondremos, además, que N es par. Si aplicamos la fórmula de Simpson a cada intervalo $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, $i = 0, 1, \ldots, (\frac{N}{2} - 1)$, (es decir, $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ..., $[x_{N-2}, x_N]$), tenemos

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx \approx \frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{6}\left[f(x_{2i}) + 4f\left(\frac{x_{2i} + x_{2i+2}}{2}\right) + f(x_{2i+2})\right]$$
$$= \frac{h}{3}\big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\big)$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{N-2}}^{x_N} f(x)\,dx$$

se obtiene la *Fórmula de Simpson Compuesta*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big)$$

Si f es de clase 4 en $[a, b]$, entonces existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

Si f es de clase 4 en $[a, b]$, entonces existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de Simpson compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$, cometiendo un error menor que 10^{-2}.

Si f es de clase 4 en $[a, b]$, entonces existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

<u>Ejemplo</u>: Vamos a aplicar la fórmula de Simpson compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$, cometiendo un error menor que 10^{-2}.
Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

Si f es de clase 4 en $[a,b]$, entonces existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de Simpson compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$, cometiendo un error menor que 10^{-2}. Sabemos que existe $\eta \in (0,\pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N (par) para que sea $E < 10^{-2}$, sin saber quien es η.

Si f es de clase 4 en $[a,b]$, entonces existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4}f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4}f^{4)}(\eta)\right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de Simpson compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$, cometiendo un error menor que 10^{-2}. Sabemos que existe $\eta \in (0,\pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4}f^{4)}(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N (par) para que sea $E < 10^{-2}$, sin saber quien es η. Tenemos que $f^{4)}(\eta) = \operatorname{sen}\eta$. Así, $E = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}\operatorname{sen}\eta\right| = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}\right|\left|\operatorname{sen}\eta\right| \leq \frac{\pi^5}{180N^4}$. Por tanto, será suficiente elegir N par tal que $\frac{\pi^5}{180N^4} < 10^{-2}$. Es decir, $N >$

Si f es de clase 4 en $[a, b]$, entonces existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4}f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4}f^{4)}(\eta)\right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de Simpson compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$, cometiendo un error menor que 10^{-2}. Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4}f^{4)}(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N (par) para que sea $E < 10^{-2}$, sin saber quien es η. Tenemos que $f^{4)}(\eta) = \operatorname{sen}\eta$. Así, $E = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}\operatorname{sen}\eta\right| = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}\right|\left|\operatorname{sen}\eta\right| \leq \frac{\pi^5}{180N^4}$. Por tanto, será suficiente elegir N par tal que $\frac{\pi^5}{180N^4} < 10^{-2}$. Es decir, $N > \left(\frac{\pi^5}{180\cdot 10^{-2}}\right)^{\frac{1}{4}} = 3.61093$.

Tomo $N =$

Si f es de clase 4 en $[a,b]$, entonces existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de Simpson compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$, cometiendo un error menor que 10^{-2}. Sabemos que existe $\eta \in (0,\pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N (par) para que sea $E < 10^{-2}$, sin saber quien es η. Tenemos que $f^{4)}(\eta) = \operatorname{sen}\eta$. Así, $E = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}\operatorname{sen}\eta\right| = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}\right|\left|\operatorname{sen}\eta\right| \leq \frac{\pi^5}{180N^4}$. Por tanto, será suficiente elegir N par tal que $\frac{\pi^5}{180N^4} < 10^{-2}$. Es decir, $N > \left(\frac{\pi^5}{180\cdot 10^{-2}}\right)^{\frac{1}{4}} = 3.61093$.

Tomo $N = 4$.
Aplico la fórmula: $h =$

Si f es de clase 4 en $[a,b]$, entonces existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

<u>Ejemplo</u>: Vamos a aplicar la fórmula de Simpson compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$, cometiendo un error menor que 10^{-2}.
Sabemos que existe $\eta \in (0,\pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N (par) para que sea $E < 10^{-2}$, sin saber quien es η. Tenemos que $f^{4)}(\eta) = \operatorname{sen}\eta$. Así, $E = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}\operatorname{sen}\eta\right| = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}\right|\left|\operatorname{sen}\eta\right| \leq \frac{\pi^5}{180N^4}$. Por tanto, será suficiente elegir N par tal que $\frac{\pi^5}{180N^4} < 10^{-2}$. Es decir, $N > \left(\frac{\pi^5}{180\cdot 10^{-2}}\right)^{\frac{1}{4}} = 3.61093$.

Tomo $N = 4$.
Aplico la fórmula: $h = \frac{b-a}{N} = \frac{\pi}{4}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$:
$x_0 =$

Si f es de clase 4 en $[a,b]$, entonces existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

Ejemplo: Vamos a aplicar la fórmula de Simpson compuesta para aproximar la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$, cometiendo un error menor que 10^{-2}.
Sabemos que existe $\eta \in (0,\pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N (par) para que sea $E < 10^{-2}$, sin saber quien es η. Tenemos que $f^{4)}(\eta) = \operatorname{sen}\eta$. Así, $E = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}\operatorname{sen}\eta\right| = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}\right|\left|\operatorname{sen}\eta\right| \leq \frac{\pi^5}{180N^4}$. Por tanto, será suficiente elegir N par tal que $\frac{\pi^5}{180N^4} < 10^{-2}$. Es decir, $N > \left(\frac{\pi^5}{180\cdot 10^{-2}}\right)^{\frac{1}{4}} = 3.61093$.

Tomo $N = 4$.
Aplico la fórmula: $h = \frac{b-a}{N} = \frac{\pi}{4}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$:
$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{3\pi}{4}, \quad x_4 = \pi.$

Si f es de clase 4 en $[a, b]$, entonces existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\sum_{i=0}^{\frac{4}{2}-1}\Big(\operatorname{sen}(x_{2i}) + 4\operatorname{sen}(x_{2i+1}) + \operatorname{sen}(x_{2i+2})\Big) = (*)$$

Tomo $N = 4$.

Aplico la fórmula: $h = \frac{b-a}{N} = \frac{\pi}{4}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$:

$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{3\pi}{4}, \quad x_4 = \pi.$

Si f es de clase 4 en $[a, b]$, entonces existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\sum_{i=0}^{\frac{4}{2}-1}\Big(\operatorname{sen}(x_{2i}) + 4\operatorname{sen}(x_{2i+1}) + \operatorname{sen}(x_{2i+2})\Big) = (*)$$

$$(*) = \frac{\pi}{12}\sum_{i=0}^{1}\Big(\operatorname{sen}(x_{2i}) + 4\operatorname{sen}(x_{2i+1}) + \operatorname{sen}(x_{2i+2})\Big) =$$

Tomo $N = 4$.

Aplico la fórmula: $h = \frac{b-a}{N} = \frac{\pi}{4}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$:

$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{3\pi}{4}$, $x_4 = \pi$.

Si f es de clase 4 en $[a,b]$, entonces existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\sum_{i=0}^{\frac{4}{2}-1}\Big(\operatorname{sen}(x_{2i}) + 4\operatorname{sen}(x_{2i+1}) + \operatorname{sen}(x_{2i+2})\Big) = (*)$$

$$(*) = \frac{\pi}{12}\sum_{i=0}^{1}\Big(\operatorname{sen}(x_{2i}) + 4\operatorname{sen}(x_{2i+1}) + \operatorname{sen}(x_{2i+2})\Big) =$$

$$\frac{\pi}{12}\Big[\Big(\operatorname{sen}(x_0) + 4\operatorname{sen}(x_1) + \operatorname{sen}(x_2)\Big) + \Big(\operatorname{sen}(x_2) + 4\operatorname{sen}(x_3) + \operatorname{sen}(x_4)\Big)\Big] =$$

Tomo $N = 4$.

Aplico la fórmula: $h = \frac{b-a}{N} = \frac{\pi}{4}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$:

$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{3\pi}{4}, \quad x_4 = \pi.$

Si f es de clase 4 en $[a,b]$, entonces existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\sum_{i=0}^{\frac{4}{2}-1}\Big(\operatorname{sen}(x_{2i}) + 4\operatorname{sen}(x_{2i+1}) + \operatorname{sen}(x_{2i+2})\Big) = (*)$$

$$(*) = \frac{\pi}{12}\sum_{i=0}^{1}\Big(\operatorname{sen}(x_{2i}) + 4\operatorname{sen}(x_{2i+1}) + \operatorname{sen}(x_{2i+2})\Big) =$$

$$\frac{\pi}{12}\Big[\Big(\operatorname{sen}(x_0) + 4\operatorname{sen}(x_1) + \operatorname{sen}(x_2)\Big) + \Big(\operatorname{sen}(x_2) + 4\operatorname{sen}(x_3) + \operatorname{sen}(x_4)\Big)\Big] =$$

$$\frac{\pi}{12}\Big[\Big(\operatorname{sen} 0 + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\Big) + \Big(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\pi\Big)\Big] = (*)$$

Tomo $N = 4$.

Aplico la fórmula: $h = \frac{b-a}{N} = \frac{\pi}{4}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$:

$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{3\pi}{4}, \quad x_4 = \pi.$

Si f es de clase 4 en $[a,b]$, entonces existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\sum_{i=0}^{\frac{4}{2}-1}\Big(\operatorname{sen}(x_{2i}) + 4\operatorname{sen}(x_{2i+1}) + \operatorname{sen}(x_{2i+2})\Big) = (*)$$

$(*) =$

$$\frac{\pi}{12}\Big[\Big(\operatorname{sen}(x_0) + 4\operatorname{sen}(x_1) + \operatorname{sen}(x_2)\Big) + \Big(\operatorname{sen}(x_2) + 4\operatorname{sen}(x_3) + \operatorname{sen}(x_4)\Big)\Big] =$$

$$\frac{\pi}{12}\Big[\Big(\operatorname{sen} 0 + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\Big) + \Big(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\pi\Big)\Big] = (*)$$

Tomo $N = 4$.

Aplico la fórmula: $h = \frac{b-a}{N} = \frac{\pi}{4}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$:

$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{3\pi}{4}, \quad x_4 = \pi.$

Si f es de clase 4 en $[a,b]$, entonces existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4}f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4}f^{4)}(\eta)\right|$.

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\sum_{i=0}^{\frac{4}{2}-1}\Big(\operatorname{sen}(x_{2i}) + 4\operatorname{sen}(x_{2i+1}) + \operatorname{sen}(x_{2i+2})\Big) = (*)$$

$$(*) = \frac{\pi}{12}(2+4\sqrt{2}) = 2.00456.$$

$$\frac{\pi}{12}\left[\Big(\operatorname{sen}(x_0) + 4\operatorname{sen}(x_1) + \operatorname{sen}(x_2)\Big) + \Big(\operatorname{sen}(x_2) + 4\operatorname{sen}(x_3) + \operatorname{sen}(x_4)\Big)\right] =$$
$$\frac{\pi}{12}\left[\Big(\operatorname{sen} 0 + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\Big) + \Big(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\pi\Big)\right] = (*)$$

Tomo $N = 4$.
Aplico la fórmula: $h = \frac{b-a}{N} = \frac{\pi}{4}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$:
$x_0 = 0$, $\quad x_1 = \frac{\pi}{4}$, $\quad x_2 = \frac{\pi}{2}$, $\quad x_3 = \frac{3\pi}{4}$, $\quad x_4 = \pi$.

Si f es de clase 4 en $[a, b]$, entonces existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) - \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)$$

es decir, el error que se comete en la aproximación es $\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\sum_{i=0}^{\frac{4}{2}-1}\Big(\operatorname{sen}(x_{2i}) + 4\operatorname{sen}(x_{2i+1}) + \operatorname{sen}(x_{2i+2})\Big) = (*)$$

$$(*) = \frac{\pi}{12}(2 + 4\sqrt{2}) = 2.00456.$$

El valor exacto es $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 2$, con lo que

$\left|\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx - 2.00456\right| = 0.00456 < 0.01$, como deseábamos.

Tomo $N = 4$.

Aplico la fórmula: $h = \frac{b-a}{N} = \frac{\pi}{4}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$:

$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{3\pi}{4}, \quad x_4 = \pi.$

Ejercicio: En el ejemplo anterior, determinar N para que el error cometido al aproximar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx$ con la fórmula de Simpson compuesta se menor que 10^{-3}. Aplicar la fórmula.

Simpson compuesta:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2})\Big)$$

$$h=\frac{b-a}{N}, \quad x_i = a+ih$$

$$E=\left|\frac{(b-a)^5}{180N^4}f^{4)}(\eta)\right|.$$

Ejercicio: En el ejemplo anterior, determinar N para que el error cometido al aproximar $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ con la fórmula de Simpson compuesta se menor que 10^{-3}. Aplicar la fórmula.

Solución: Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left| \frac{(b-a)^5}{180 N^4} f^{4)}(\eta) \right|$.

Simpson compuesta:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \Big(f(x_{2i}) + 4 f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \Big)$$

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad x_i = a + ih$$

$$E = \left| \frac{(b-a)^5}{180 N^4} f^{4)}(\eta) \right|.$$

Ejercicio: En el ejemplo anterior, determinar N para que el error cometido al aproximar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx$ con la fórmula de Simpson compuesta se menor que 10^{-3}. Aplicar la fórmula.

Solución: Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left| \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta) \right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 10^{-3}$.

Simpson compuesta:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \Big)$$

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad x_i = a + ih$$

$$E = \left| \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta) \right|.$$

Ejercicio: En el ejemplo anterior, determinar N para que el error cometido al aproximar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$ con la fórmula de Simpson compuesta se menor que 10^{-3}. Aplicar la fórmula.

Solución: Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 10^{-3}$. Tenemos que $E = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}(-\operatorname{sen}\eta)\right| \leq \frac{\pi^5}{180N^4}$. Por tanto, será suficiente elegir N (par) tal que $\frac{\pi^5}{180N^4} < 10^{-3}$. Es decir, $N >$

Simpson compuesta:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \Big)$$

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad x_i = a + ih$$

$$E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|.$$

Ejercicio: En el ejemplo anterior, determinar N para que el error cometido al aproximar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx$ con la fórmula de Simpson compuesta se menor que 10^{-3}. Aplicar la fórmula.

Solución: Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left| \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta) \right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 10^{-3}$. Tenemos que $E = \left| \frac{\pi^5}{180N^4} (-\operatorname{sen} \eta) \right| \leq \frac{\pi^5}{180N^4}$. Por tanto, será suficiente elegir N (par) tal que $\frac{\pi^5}{180N^4} < 10^{-3}$. Es decir, $N > \left(\frac{\pi^5}{180 \cdot 10^{-3}} \right)^{\frac{1}{4}} =$ 6.42124. Tomo $N =$

Simpson compuesta:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \Big)$$

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad x_i = a + ih$$

$$E = \left| \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta) \right|.$$

Ejercicio: En el ejemplo anterior, determinar N para que el error cometido al aproximar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$ con la fórmula de Simpson compuesta se menor que 10^{-3}. Aplicar la fórmula.

Solución: Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left| \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta) \right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 10^{-3}$. Tenemos que $E = \left| \frac{\pi^5}{180N^4} (-\operatorname{sen} \eta) \right| \leq \frac{\pi^5}{180N^4}$. Por tanto, será suficiente elegir N (par) tal que $\frac{\pi^5}{180N^4} < 10^{-3}$. Es decir, $N > \left(\frac{\pi^5}{180 \cdot 10^{-3}} \right)^{\frac{1}{4}} = 6.42124$. Tomo $N = 8$. Aplico la fórmula: $h =$

Simpson compuesta:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \Big)$$

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad x_i = a + ih$$

$$E = \left| \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta) \right|.$$

Ejercicio: En el ejemplo anterior, determinar N para que el error cometido al aproximar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$ con la fórmula de Simpson compuesta se menor que 10^{-3}. Aplicar la fórmula.

Solución: Sabemos que existe $\eta \in (0,\pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 10^{-3}$. Tenemos que $E = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}(-\operatorname{sen}\eta)\right| \leq \frac{\pi^5}{180N^4}$. Por tanto, será suficiente elegir N (par) tal que $\frac{\pi^5}{180N^4} < 10^{-3}$. Es decir, $N > \left(\frac{\pi^5}{180\cdot 10^{-3}}\right)^{\frac{1}{4}} =$ 6.42124. Tomo $N = 8$. Aplico la fórmula: $h = \frac{\pi}{8}$, $x_i =$

Simpson compuesta:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big)$$

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad x_i = a + ih$$

$$E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|.$$

Ejercicio: En el ejemplo anterior, determinar N para que el error cometido al aproximar $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$ con la fórmula de Simpson compuesta se menor que 10^{-3}. Aplicar la fórmula.

Solución: Sabemos que existe $\eta \in (0, \pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left| \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta) \right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 10^{-3}$. Tenemos que $E = \left| \frac{\pi^5}{180N^4} (-\operatorname{sen} \eta) \right| \leq \frac{\pi^5}{180N^4}$. Por tanto, será suficiente elegir N (par) tal que $\frac{\pi^5}{180N^4} < 10^{-3}$. Es decir, $N > \left(\frac{\pi^5}{180 \cdot 10^{-3}} \right)^{\frac{1}{4}} = 6.42124$. Tomo $N = 8$. Aplico la fórmula: $h = \frac{\pi}{8}$, $x_i = \frac{i\pi}{8}$, $i = 0, 1, \ldots, 8$.

Simpson compuesta:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \Big)$$

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad x_i = a + ih$$

$$E = \left| \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta) \right|.$$

Ejercicio: En el ejemplo anterior, determinar N para que el error cometido al aproximar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ con la fórmula de Simpson compuesta se menor que 10^{-3}. Aplicar la fórmula.

Solución: Sabemos que existe $\eta \in (0,\pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 10^{-3}$. Tenemos que $E = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}(-\operatorname{sen}\eta)\right| \leq \frac{\pi^5}{180N^4}$. Por tanto, será suficiente elegir N (par) tal que $\frac{\pi^5}{180N^4} < 10^{-3}$. Es decir, $N > \left(\frac{\pi^5}{180\cdot 10^{-3}}\right)^{\frac{1}{4}} = 6.42124$. Tomo $N = 8$. Aplico la fórmula: $h = \frac{\pi}{8}$, $x_i = \frac{i\pi}{8}$, $i = 0, 1, \ldots, 8$.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\pi}{24}\sum_{i=0}^{3}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) =$$

Simpson compuesta:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big)$$

$h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$

$E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$.

Ejercicio: En el ejemplo anterior, determinar N para que el error cometido al aproximar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$ con la fórmula de Simpson compuesta se menor que 10^{-3}. Aplicar la fórmula.

Solución: Sabemos que existe $\eta \in (0,\pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 10^{-3}$. Tenemos que $E = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}(-\operatorname{sen}\eta)\right| \leq \frac{\pi^5}{180N^4}$. Por tanto, será suficiente elegir N (par) tal que $\frac{\pi^5}{180N^4} < 10^{-3}$. Es decir, $N > \left(\frac{\pi^5}{180\cdot 10^{-3}}\right)^{\frac{1}{4}} = 6.42124$. Tomo $N = 8$. Aplico la fórmula: $h = \frac{\pi}{8}$, $x_i = \frac{i\pi}{8}$, $i = 0, 1, \ldots, 8$.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx \approx \frac{\pi}{24} \sum_{i=0}^{3} \Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \Big) =$$

$$\frac{\pi}{24}\Big[\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big) + \big(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\big)$$
$$+ \big(f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\big) + \big(f(x_6) + 4f(x_7) + f(x_8)\big)\Big] =$$

Ejercicio: En el ejemplo anterior, determinar N para que el error cometido al aproximar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$ con la fórmula de Simpson compuesta se menor que 10^{-3}. Aplicar la fórmula.

Solución: Sabemos que existe $\eta \in (0,\pi)$ tal que el error en la aproximación es $E = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{4)}(\eta)\right|$. Por tanto, tengo que calcular N para que sea $E < 10^{-3}$. Tenemos que $E = \left|\frac{\pi^5}{180N^4}(-\operatorname{sen}\eta)\right| \leq \frac{\pi^5}{180N^4}$. Por tanto, será suficiente elegir N (par) tal que $\frac{\pi^5}{180N^4} < 10^{-3}$. Es decir, $N > \left(\frac{\pi^5}{180\cdot 10^{-3}}\right)^{\frac{1}{4}} = 6.42124$. Tomo $N = 8$. Aplico la fórmula: $h = \frac{\pi}{8}$, $x_i = \frac{i\pi}{8}$, $i = 0, 1, \ldots, 8$.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx \approx \frac{\pi}{24}\sum_{i=0}^{3}\Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big) =$$

$$\frac{\pi}{24}\Big[\big(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\big) + \big(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\big)$$
$$+ \big(f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6)\big) + \big(f(x_6)+4f(x_7)+f(x_8)\big)\Big] =$$

$$\frac{\pi}{24}\Big[\big(\operatorname{sen} 0 + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{8}\big) + \big(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{8} + 4\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{8}\big)$$
$$+ \big(\operatorname{sen}\frac{4\pi}{8} + 4\operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} + \operatorname{sen}\frac{6\pi}{8}\big) + \big(\operatorname{sen}\frac{6\pi}{8} + 4\operatorname{sen}\frac{7\pi}{8} + \operatorname{sen}\pi\big)\Big] = 2.00027.$$

Ejercicio: En el ejemplo anterior, determinar N para que el error cometido al aproximar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$ con la fórmula de Simpson compuesta se menor que 10^{-3}. Aplicar la fórmula.

Solución:

El valor exacto es $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = 2$, con

lo que $\left| \int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx - 2.00027 \right| = 0.00027 < 10^{-3}$, como deseábamos.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx \approx \frac{\pi}{24} \sum_{i=0}^{3} \Big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \Big) =$$

$$\frac{\pi}{24} \Big[\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \big) + \big(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \big)$$
$$+ \big(f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6) \big) + \big(f(x_6) + 4f(x_7) + f(x_8) \big) \Big] =$$

$$\frac{\pi}{24} \Big[\big(\operatorname{sen} 0 + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{8} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{8} \big) + \big(\operatorname{sen} \frac{2\pi}{8} + 4 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{8} + \operatorname{sen} \frac{4\pi}{8} \big)$$
$$+ \big(\operatorname{sen} \frac{4\pi}{8} + 4 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{8} + \operatorname{sen} \frac{6\pi}{8} \big) + \big(\operatorname{sen} \frac{6\pi}{8} + 4 \operatorname{sen} \frac{7\pi}{8} + \operatorname{sen} \pi \big) \Big] = 2.00027.$$

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, en el intervalo $[2, 3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, en el intervalo $[2, 3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución:Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a, b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2, 3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$.

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, en el intervalo $[2, 3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución: Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a, b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2, 3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$. Calculamos $f'(x) =$

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2e^{-x}$, en el intervalo $[2,3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución: Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a,b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2,3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$. Calculamos $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, $f''(x) =$

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, en el intervalo $[2,3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución:Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a,b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2,3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$. Calculamos $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, $f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$. Por tanto, tenemos que acotar superiormente $|(2 - 4x + x^2)e^{-x}|$ en el intervalo $[2,3]$.

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, en el intervalo $[2, 3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución:Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a, b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2, 3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$. Calculamos $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, $f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$. Por tanto, tenemos que acotar superiormente $|(2 - 4x + x^2)e^{-x}|$ en el intervalo $[2, 3]$. Considemos el polinomio $P(x) = (2 - 4x + x^2)$. Este polinomio tiene las raíces $\alpha_1 = 0.58 < 2 < 3 < \alpha_2 = 3.41$.

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, en el intervalo $[2, 3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución: Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a, b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2, 3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$. Calculamos $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, $f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$. Por tanto, tenemos que acotar superiormente $|(2 - 4x + x^2)e^{-x}|$ en el intervalo $[2, 3]$. Considemos el polinomio $P(x) = (2 - 4x + x^2)$. Este polinomio tiene las raíces $\alpha_1 = 0.58 < 2 < 3 < \alpha_2 = 3.41$. Por tanto, en $[2, 3]$ tendrá el signo que tenga en $x = 2$. Como $P(2) = -2$, ya sabemos que $P(x)$ es negativo en $[2, 3]$.

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2e^{-x}$, en el intervalo $[2,3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución:Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2}f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a,b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2}f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2,3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2}f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$. Calculamos $f'(x) = (2x-x^2)e^{-x}$, $f''(x) = (2-4x+x^2)e^{-x}$. Por tanto, tenemos que acotar superiormente $|(2-4x+x^2)e^{-x}|$ en el intervalo $[2,3]$. Considemos el polinomio $P(x) = (2-4x+x^2)$. Este polinomio tiene las raíces $\alpha_1 = 0.58 < 2 < 3 < \alpha_2 = 3.41$. Por tanto, en $[2,3]$ tendrá el signo que tenga en $x = 2$. Como $P(2) = -2$, ya sabemos que $P(x)$ es negativo en $[2,3]$. Por otra parte, la función e^{-x} es positiva para todo x. Por consiguiente, para $x \in [2,3]$ se tiene que $|(2-4x+x^2)e^{-x}| = (-2+4x-x^2)e^{-x}$.

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2e^{-x}$, en el intervalo $[2,3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución:Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2}f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a,b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2}f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2,3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2}f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$. Calculamos $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, $f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$. Por tanto, tenemos que acotar superiormente $|(2 - 4x + x^2)e^{-x}|$ en el intervalo $[2,3]$. Considemos el polinomio $P(x) = (2 - 4x + x^2)$. Este polinomio tiene las raíces $\alpha_1 = 0.58 < 2 < 3 < \alpha_2 = 3.41$. Por tanto, en $[2,3]$ tendrá el signo que tenga en $x = 2$. Como $P(2) = -2$, ya sabemos que $P(x)$ es negativo en $[2,3]$. Por otra parte, la función e^{-x} es positiva para todo x. Por consiguiente, para $x \in [2,3]$ se tiene que $|(2 - 4x + x^2)e^{-x}| = (-2 + 4x - x^2)e^{-x}$. Sea $g(x) = (-2 + 4x - x^2)e^{-x}$. Vamos a calcular el máximo de esta función en $[2,3]$.

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, en el intervalo $[2,3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución:Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a,b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2,3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$. Calculamos $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, $f''(x) = (2-4x+x^2)e^{-x}$. Por tanto, tenemos que acotar superiormente $|(2-4x+x^2)e^{-x}|$ en el intervalo $[2,3]$. Considemos el polinomio $P(x) = (2-4x+x^2)$. Este polinomio tiene las raíces $\alpha_1 = 0.58 < 2 < 3 < \alpha_2 = 3.41$. Por tanto, en $[2,3]$ tendrá el signo que tenga en $x = 2$. Como $P(2) = -2$, ya sabemos que $P(x)$ es negativo en $[2,3]$. Por otra parte, la función e^{-x} es positiva para todo x. Por consiguiente, para $x \in [2,3]$ se tiene que $|(2-4x+x^2)e^{-x}| = (-2+4x-x^2)e^{-x}$. Sea $g(x) = (-2+4x-x^2)e^{-x}$. Vamos a calcular el máximo de esta función en $[2,3]$. Tenemos que $g'(x) = (6-6x+x^2)e^{-x}$. Como $h(x) = 6-6x+x^2$ tiene las raíces $\beta_1 = 1.26 < 2 < 3 < \beta_2 = 4.73$, resulta que $h(x) = (6-6x+x^2)e^{-x}$ tendrá en $[2,3]$ el signo que tenga en $x = 2$.

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, en el intervalo $[2,3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución:Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a,b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2,3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$. Calculamos $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, $f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$. Por tanto, tenemos que acotar superiormente $|(2-4x+x^2)e^{-x}|$ en el intervalo $[2,3]$. Considemos el polinomio $P(x) = (2-4x+x^2)$. Este polinomio tiene las raíces $\alpha_1 = 0.58 < 2 < 3 < \alpha_2 = 3.41$. Por tanto, en $[2,3]$ tendrá el signo que tenga en $x = 2$. Como $P(2) = -2$, ya sabemos que $P(x)$ es negativo en $[2,3]$. Por otra parte, la función e^{-x} es positiva para todo x. Por consiguiente, para $x \in [2,3]$ se tiene que $|(2-4x+x^2)e^{-x}| = (-2+4x-x^2)e^{-x}$. Sea $g(x) = (-2+4x-x^2)e^{-x}$. Vamos a calcular el máximo de esta función en $[2,3]$. Tenemos que $g'(x) = (6-6x+x^2)e^{-x}$. Como $h(x) = 6-6x+x^2$ tiene las raíces $\beta_1 = 1.26 < 2 < 3 < \beta_2 = 4.73$, resulta que $h(x) = (6-6x+x^2)e^{-x}$ tendrá en $[2,3]$ el signo que tenga en $x = 2$. Como $h(2) = -2$, ya sabemos que $g'(x)$ es negativo en $[2,3]$, con lo que $g(x)$ es decreciente en ese intervalo.

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, en el intervalo $[2, 3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución: Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a, b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2, 3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$. Calculamos $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, $f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$. Por tanto, tenemos que acotar superiormente $|(2 - 4x + x^2)e^{-x}|$ en el intervalo $[2, 3]$. Considemos el polinomio $P(x) = (2 - 4x + x^2)$. Este polinomio tiene las raíces $\alpha_1 = 0.58 < 2 < 3 < \alpha_2 = 3.41$. Por tanto, en $[2, 3]$ tendrá el signo que tenga en $x = 2$. Como $P(2) = -2$, ya sabemos que $P(x)$ es negativo en $[2, 3]$. Por otra parte, la función e^{-x} es positiva para todo x. Por consiguiente, para $x \in [2, 3]$ se tiene que $|(2 - 4x + x^2)e^{-x}| = (-2 + 4x - x^2)e^{-x}$. Sea $g(x) = (-2 + 4x - x^2)e^{-x}$. Vamos a calcular el máximo de esta función en $[2, 3]$. Tenemos que $g'(x) = (6 - 6x + x^2)e^{-x}$. Como $h(x) = 6 - 6x + x^2$ tiene las raíces $\beta_1 = 1.26 < 2 < 3 < \beta_2 = 4.73$, resulta que $h(x) = (6 - 6x + x^2)e^{-x}$ tendrá en $[2, 3]$ el signo que tenga en $x = 2$. Como $h(2) = -2$, ya sabemos que $g'(x)$ es negativo en $[2, 3]$, con lo que $g(x)$ es decreciente en ese intervalo. Por tanto, para todo $x \in [2, 3]$ se verifica que $g(x) \leq g(2) = \frac{2}{e^2} = 0.270671$.

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, en el intervalo $[2, 3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución: Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a, b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2, 3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$. Calculamos $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, $f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$. Por tanto, tenemos que acotar superiormente $|(2 - 4x + x^2)e^{-x}|$ en el intervalo $[2, 3]$.

Ya sabemos que $\left|f''(\eta)\right| \leq 0.270671$,

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, en el intervalo $[2, 3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución: Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a, b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2, 3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$. Calculamos $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, $f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$. Por tanto, tenemos que acotar superiormente $|(2 - 4x + x^2)e^{-x}|$ en el intervalo $[2, 3]$.

Ya sabemos que $\left|f''(\eta)\right| \leq 0.270671$, con lo cual $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right| \leq \frac{0.270671}{12N^2}$

Tenemos que elegir N para que $\frac{0.270671}{12N^2} < 10^{-4}$, es decir,

$N >$

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, en el intervalo $[2, 3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución: Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a, b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2, 3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$. Calculamos $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, $f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$. Por tanto, tenemos que acotar superiormente $|(2 - 4x + x^2)e^{-x}|$ en el intervalo $[2, 3]$.

Ya sabemos que $\left|f''(\eta)\right| \leq 0.270671$, con lo cual $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right| \leq \frac{0.270671}{12N^2}$

Tenemos que elegir N para que $\frac{0.270671}{12N^2} < 10^{-4}$, es decir,

$N > \sqrt{\frac{0.270671 \times 10^4}{12}} = 15.0186.$

Ejercicio: Considerar la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, en el intervalo $[2,3]$. Queremos aplicarle la fórmula de los trapecios compuesta, estando seguros de cometer un error menor que 10^{-4}. Calcular N.

Solución:Sabemos que el error en la fórmula de los trapecios compuesta es de la forma $E = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)\right|$, con $\eta \in (a,b)$. En nuestro caso, $E = \left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$, $\eta \in (2,3)$. Queremos que $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right|$ sea menor que 10^{-4}. Por tanto, tenemos que acotar $\left|f''(\eta)\right|$. Calculamos $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, $f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$. Por tanto, tenemos que acotar superiormente $|(2 - 4x + x^2)e^{-x}|$ en el intervalo $[2,3]$.

Ya sabemos que $\left|f''(\eta)\right| \leq 0.270671$, con lo cual $\left|\frac{1}{12N^2} f''(\eta)\right| \leq \frac{0.270671}{12N^2}$

Tenemos que elegir N para que $\frac{0.270671}{12N^2} < 10^{-4}$, es decir,

$N > \sqrt{\frac{0.270671 \times 10^4}{12}} = 15.0186$. Por tanto, $N = 16$.