Cálculo Numérico y Estadística

Primera parte: Cálculo Numérico

José Luis Bravo

Curso 2019/2020
Segundo semestre

Factorización en el método de Gauss:

Nuestro sistema original lo podemos escribir en forma matricial:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

o bien, $Ax = b$, en donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Supongamos ahora que podemos aplicar el método de Gauss sin tener que reordenar las ecuaciones. Denotemos por

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

la matriz original del sistema. Tras cada reducción vamos obteniendo las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n2}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix} \to \cdots \to$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Esta última matriz es la triangular superior que queríamos obtener.

Puede demostrarse que si definimos las matrices

$$U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{n3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & \cdots & \frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} & 1 \end{pmatrix}$$

Puede demostrarse que si definimos las matrices

$$U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{n3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & \cdots & \frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} & 1 \end{pmatrix}$$

entonces se verifica la igualdad

$$A = LU$$

Puede demostrarse que si definimos las matrices

$$U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{n3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & \cdots & \frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} & 1 \end{pmatrix}$$

entonces se verifica la igualdad

$$A = LU$$

- U es la matriz resultante de aplicar el método de Gauss.

- Cada columna de L se obtiene a partir de la columna correspondiente de las etapas anteriores.)

En el primer ejemplo que vimos consideramos el sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 &= 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Es decir, $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$

En el primer ejemplo que vimos consideramos el sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 &= 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Es decir, $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$

Las matrices que fuimos obteniendo fueron

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{23}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

Con lo que las matrices U y L son:

Las matrices que fuimos obteniendo fueron

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{23}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

Con lo que las matrices U y L son:

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix},$$

Las matrices que fuimos obteniendo fueron

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{23}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

Con lo que las matrices U y L son:

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{\frac{11}{5}}{\frac{-41}{5}} & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices que fuimos obteniendo fueron

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{23}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

Con lo que las matrices U y L son:

$$U=\begin{pmatrix}5 & 7 & 6\\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5}\\ 0 & 0 & \frac{171}{41}\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{3}{5} & 1 & 0\\ \frac{2}{5} & \frac{\frac{11}{5}}{\frac{-41}{5}} & 1\end{pmatrix}$$

Obsérvese que, efectivamente, se verifica la igualdad:

$$LU=A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 6\\ 3 & -4 & 2\\ 2 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

Las matrices que fuimos obteniendo fueron

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)}\\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)}\\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 7 & 6\\ 3 & -4 & 2\\ 2 & 5 & 7\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)}\\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)}\\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 7 & 6\\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5}\\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{23}{5}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)}\\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)}\\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 7 & 6\\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5}\\ 0 & 0 & \frac{171}{41}\end{pmatrix}$$

Aplicaciones de la factorización $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$: ¿Y para que sirve esto?

Aplicaciones de la factorización $\mathbf{A = LU}$: ¿Y para que sirve esto?

1) Cálculo de determinantes:

De la igualdad $A = LU$ se sigue que $\det(A) = \det(L)\det(U)$. Pero como L y U son triangulares, se tiene que

$$\det(L) = l_{11} \cdot l_{22} \cdots l_{nn}, \qquad \det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn},$$

con lo que: $\det(A) = l_{11} \cdot l_{22} \cdots l_{nn} \cdot u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn}$

Aplicaciones de la factorización A = LU: ¿Y para que sirve esto?

1) Cálculo de determinantes:

De la igualdad $A = LU$ se sigue que $\det(A) = \det(L)\det(U)$. Pero como L y U son triangulares, se tiene que

$$\det(L) = l_{11} \cdot l_{22} \cdots l_{nn}, \qquad \det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn},$$

con lo que: $\det(A) = l_{11} \cdot l_{22} \cdots l_{nn} \cdot u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn}$

En nuestro ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\det(A) = 5 \cdot (\frac{-41}{5}) \cdot \frac{171}{41} = -171$.

Aplicaciones de la factorización A = LU: ¿Y para que sirve esto?

1) Cálculo de determinantes:

De la igualdad $A = LU$ se sigue que $\det(A) = \det(L)\det(U)$. Pero como L y U son triangulares, se tiene que

$$\det(L) = l_{11} \cdot l_{22} \cdots l_{nn}, \qquad \det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn},$$

con lo que: $\det(A) = l_{11} \cdot l_{22} \cdots l_{nn} \cdot u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn}$

En nuestro ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\det(A) = 5 \cdot (\frac{-41}{5}) \cdot \frac{171}{41} = -171$.

(Obsérvese que esto muestra que si U es la matriz resultante de aplicar el método de Gauss a la matriz A, entonces $\det(A) = \det(U)$.)

Aplicaciones de la factorización $\mathbf{A = LU}$: ¿Y para que sirve esto?

2) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Supongamos que queremos resolver el sistema cuadrado $Ax = b$, y que hemos conseguido factorizar A como $A = LU$. Si x e y son las soluciones de los sistemas triangulares

$$Ly = b, \qquad Ux = y$$

entonces x es la solución de $Ax = b$, pues $Ax = L(Ux) = Ly = b$.

Aplicaciones de la factorización A = LU: ¿Y para que sirve esto?

2) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Supongamos que queremos resolver el sistema cuadrado $Ax = b$, y que hemos conseguido factorizar A como $A = LU$. Si x e y son las soluciones de los sistemas triangulares

$$Ly = b, \qquad Ux = y$$

entonces x es la solución de $Ax = b$, pues $Ax = L(Ux) = Ly = b$.

Ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{array} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}}_{b}$$

Aplicaciones de la factorización $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$: ¿Y para que sirve esto?

2) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Supongamos que queremos resolver el sistema cuadrado $Ax = b$, y que hemos conseguido factorizar A como $A = LU$. Si x e y son las soluciones de los sistemas triangulares

$$Ly = b, \qquad Ux = y$$

entonces x es la solución de $Ax = b$, pues $Ax = L(Ux) = Ly = b$.

Ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{array} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}}_{U}$$

Resolvemos $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

Aplicaciones de la factorización $\mathbf{A = LU}$: ¿Y para que sirve esto?

2) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Supongamos que queremos resolver el sistema cuadrado $Ax = b$, y que hemos conseguido factorizar A como $A = LU$. Si x e y son las soluciones de los sistemas triangulares

$$Ly = b, \qquad Ux = y$$

entonces x es la solución de $Ax = b$, pues $Ax = L(Ux) = Ly = b$.

Ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{array} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}}_{U}$$

Resolvemos $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{187}{41} \end{pmatrix}$$

Aplicaciones de la factorización A = LU: ¿Y para que sirve esto?

2) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Supongamos que queremos resolver el sistema cuadrado $Ax = b$, y que hemos conseguido factorizar A como $A = LU$. Si x e y son las soluciones de los sistemas triangulares

$$Ly = b, \qquad Ux = y$$

entonces x es la solución de $Ax = b$, pues $Ax = L(Ux) = Ly = b$.

Ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{array} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}}_{U}$$

Resolvemos $Ux = y$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{187}{41} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{187}{41} \end{pmatrix}$$

Aplicaciones de la factorización A = LU: ¿Y para que sirve esto?

2) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Supongamos que queremos resolver el sistema cuadrado $Ax = b$, y que hemos conseguido factorizar A como $A = LU$. Si x e y son las soluciones de los sistemas triangulares

$$Ly = b, \qquad Ux = y$$

entonces x es la solución de $Ax = b$, pues $Ax = L(Ux) = Ly = b$.

Ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{array} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}}_{U}$$

Resolvemos $Ux = y$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{187}{41} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{9} \\ \frac{-49}{171} \\ \frac{187}{171} \end{pmatrix}$$

que es la solución del primer sistema.

Obsérvese que si la factorización $A = LU$ se ha obtenido aplicando el método de Gauss, entonces la solución y de $Ly = b$ ya la hemos calculado durante la aplicación del proceso, pues no es más que el vector independiente que se obtiene en la última reducción. Por ejemplo, cuando al aplicar el método de Gauss pasamos del sistema

$$Ax = b: \quad \begin{array}{r} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{array} \qquad \text{al sistema} \qquad \begin{array}{r} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \\ -\frac{41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \\ \frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41} \end{array}$$

y construimos las matrices

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix}$$

entonces la solución de $Ly = b$ es $y = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{187}{41} \end{pmatrix}$ con lo que solo hemos tenido que resolver $Ux = y$.

A continuación vamos a ver que la factorización $A = LU$ se puede calcular directamente. Pero no toda matriz A admite una factorización de esa forma. Observemos, no obstante, el siguiente resultado:

A continuación vamos a ver que la factorización $A = LU$ se puede calcular directamente. Pero no toda matriz A admite una factorización de esa forma. Observemos, no obstante, el siguiente resultado:

Teorema: Si todos los menores principales de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

son no nulos, entonces existe una única matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$, con $l_{ii} = 1$ para $i = 1, \ldots, n$, y una única matriz triangular superior $U = (u_{ij})$ tales que $A = LU$, es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

El teorema anterior nos da una condición suficiente, pero no necesaria, para que exista factorización $A = LU$. Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ que no verifica las hipótesis del teorema pues $det(A) = 0$, la podemos escribir como $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo.

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$, y $$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$, tales que $LU = A$. Es decir, queremos que se verifique la igualdad:

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$, y $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$, tales que $LU = A$. Es decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix},$$

tales que $LU = A$. Es decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de la matriz de la izquierda con los de la derecha, y yendo de izquierda a derecha y de arriba abajo, podemos calcular todos los términos de L y U:

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$, y $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$, tales que $LU = A$. Es decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$u_{11} = 5$, $u_{12} = 7$, $u_{13} = 6$,

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix},$$

tales que $LU = A$. Es decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$u_{11} = 5,\ u_{12} = 7,\ u_{13} = 6,\qquad l_{21}u_{11} = 3 \ \rightarrow\ l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = \frac{3}{5}$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$ Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$, y $$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$, tales que $LU = A$. Es decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$u_{11} = 5,\ u_{12} = 7,\ u_{13} = 6,$ $\qquad l_{21}u_{11} = 3 \ \rightarrow\ l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = \frac{3}{5}$

$l_{21}u_{12} + u_{22} = -4 \ \rightarrow\ u_{22} = -4 - l_{21}u_{12} = -4 - \frac{3}{5}7 = \frac{-41}{5}$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$, y $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$, tales que $LU = A$. Es decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$u_{11} = 5$, $u_{12} = 7$, $u_{13} = 6$, $\qquad l_{21}u_{11} = 3 \ \rightarrow \ l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = \frac{3}{5}$

$l_{21}u_{12} + u_{22} = -4 \ \rightarrow \ u_{22} = -4 - l_{21}u_{12} = -4 - \frac{3}{5}7 = \frac{-41}{5}$

$l_{21}u_{13} + u_{23} = 2 \ \rightarrow \ u_{23} = 2 - l_{21}u_{13} = 2 - \frac{3}{5}6 = \frac{-8}{5}$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ Queremos encontrar las matrices

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$, y $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$, tales que $LU = A$. Es decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$u_{11} = 5,\ u_{12} = 7,\ u_{13} = 6,$ $\quad l_{21}u_{11} = 3 \ \rightarrow\ l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = \frac{3}{5}$

$l_{21}u_{12} + u_{22} = -4 \ \rightarrow\ u_{22} = -4 - l_{21}u_{12} = -4 - \frac{3}{5}7 = \frac{-41}{5}$

$l_{21}u_{13} + u_{23} = 2 \ \rightarrow\ u_{23} = 2 - l_{21}u_{13} = 2 - \frac{3}{5}6 = \frac{-8}{5}$

$l_{31}u_{11} = 2 \ \rightarrow\ l_{31} = \frac{2}{u_{11}} = \frac{2}{5},$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$ Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$, y $$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$, tales que $LU = A$. Es decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$u_{11} = 5$, $u_{12} = 7$, $u_{13} = 6$, $\quad l_{21}u_{11} = 3 \rightarrow l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = \frac{3}{5}$

$l_{21}u_{12} + u_{22} = -4 \rightarrow u_{22} = -4 - l_{21}u_{12} = -4 - \frac{3}{5}7 = \frac{-41}{5}$

$l_{21}u_{13} + u_{23} = 2 \rightarrow u_{23} = 2 - l_{21}u_{13} = 2 - \frac{3}{5}6 = \frac{-8}{5}$

$l_{31}u_{11} = 2 \rightarrow l_{31} = \frac{2}{u_{11}} = \frac{2}{5}$, $\quad l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 5 \rightarrow l_{32} = \frac{5 - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{-11}{41}$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$ Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix},$$ tales que $LU = A$. Es decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$u_{11} = 5,\ u_{12} = 7,\ u_{13} = 6,$ $\quad l_{21}u_{11} = 3 \ \rightarrow\ l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = \frac{3}{5}$

$l_{21}u_{12} + u_{22} = -4 \ \rightarrow\ u_{22} = -4 - l_{21}u_{12} = -4 - \frac{3}{5}7 = \frac{-41}{5}$

$l_{21}u_{13} + u_{23} = 2 \ \rightarrow\ u_{23} = 2 - l_{21}u_{13} = 2 - \frac{3}{5}6 = \frac{-8}{5}$

$l_{31}u_{11} = 2 \ \rightarrow\ l_{31} = \frac{2}{u_{11}} = \frac{2}{5},\ \ l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 5 \ \rightarrow\ l_{32} = \frac{5 - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{-11}{41}$

$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 7 \ \rightarrow\ u_{33} = 7 - l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} = \frac{171}{41}$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Hemos calculado así las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix},$$

$$u_{11} = 5,\ u_{12} = 7,\ u_{13} = 6, \qquad l_{21}u_{11} = 3 \ \rightarrow\ l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = \frac{3}{5}$$

$$l_{21}u_{12} + u_{22} = -4 \ \rightarrow\ u_{22} = -4 - l_{21}u_{12} = -4 - \frac{3}{5}7 = \frac{-41}{5}$$
$$l_{21}u_{13} + u_{23} = 2 \ \rightarrow\ u_{23} = 2 - l_{21}u_{13} = 2 - \frac{3}{5}6 = \frac{-8}{5}$$
$$l_{31}u_{11} = 2 \ \rightarrow\ l_{31} = \frac{2}{u_{11}} = \frac{2}{5},\ \ l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 5 \ \rightarrow\ l_{32} = \frac{5 - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{-11}{41}$$
$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 7 \ \rightarrow\ u_{33} = 7 - l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} = \frac{171}{41}$$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Hemos calculado así las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix},$$

que es la descomposición que obtuvimos anteriormente.

Ya sabemos (Teorema) que el que todos los menores principales de A sean no nulos, es una condición **suficiente** para que se pueda descomponer la matriz como $A = LU$. Ya vimos con un ejemplo que esa condición puede no ser necesaria. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ se descompone como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ya sabemos (Teorema) que el que todos los menores principales de A sean no nulos, es una condición **suficiente** para que se pueda descomponer la matriz como $A = LU$. Ya vimos con un ejemplo que esa condición puede no ser necesaria. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ se descompone como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sin embargo, si no se verifican las hipótesis del teorema, puede ser que no exista descomposición $A = LU$. Por ejemplo, no existen matrices L y U tales que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{21} \end{pmatrix}$,

Ya sabemos (Teorema) que el que todos los menores principales de A sean no nulos, es una condición **suficiente** para que se pueda descomponer la matriz como $A = LU$. Ya vimos con un ejemplo que esa condición puede no ser necesaria. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ se descompone como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sin embargo, si no se verifican las hipótesis del teorema, puede ser que no exista descomposición $A = LU$. Por ejemplo, no existen matrices L y U tales que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{21} \end{pmatrix}$, pues, por una parte tendría que ser $u_{11} = 0$, y por otra $l_{21} u_{11} = 1$.

La descomposición que hemos obtenido de la matriz A como $A = LU$, en donde L es triangular inferior con diagonal de unos y U es triangular superior, se denomina descomposición de Doolittle. Si es U la matriz que tiene unos en la diagonal, la descomposición se llama de Crout.

La descomposición que hemos obtenido de la matriz A como $A = LU$, en donde L es triangular inferior con diagonal de unos y U es triangular superior, se denomina descomposición de Doolittle. Si es U la matriz que tiene unos en la diagonal, la descomposición se llama de Crout. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-11}{41} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix} \quad \text{(Doolittle)} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{-41}{5} & 0 \\ 2 & \frac{11}{5} & \frac{171}{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{41} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Crout)}
\end{aligned}$$

La descomposición que hemos obtenido de la matriz A como $A = LU$, en donde L es triangular inferior con diagonal de unos y U es triangular superior, se denomina descomposición de Doolittle. Si es U la matriz que tiene unos en la diagonal, la descomposición se llama de Crout.

En general, a la hora de obtener una descomposición $A = LU$, podemos fijar para cada i el valor de l_{ii} o de u_{ii} (pero no de ambos a la vez).

La descomposición que hemos obtenido de la matriz A como $A = LU$, en donde L es triangular inferior con diagonal de unos y U es triangular superior, se denomina descomposición de Doolittle. Si es U la matriz que tiene unos en la diagonal, la descomposición se llama de Crout.

En general, a la hora de obtener una descomposición $A = LU$, podemos fijar para cada i el valor de l_{ii} o de u_{ii} (pero no de ambos a la vez). Por ejemplo, podemos fijar los valores $u_{11} = 7$, $l_{22} = -2$, $u_{33} = 3$, y (resolviendo las ecuaciones correspondientes) obtener la descomposición

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & 0 & 0 \\ \frac{3}{7} & -2 & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{22}{41} & \frac{57}{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & \frac{49}{5} & \frac{42}{5} \\ 0 & \frac{41}{10} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La descomposición que hemos obtenido de la matriz A como $A = LU$, en donde L es triangular inferior con diagonal de unos y U es triangular superior, se denomina descomposición de Doolittle. Si es U la matriz que tiene unos en la diagonal, la descomposición se llama de Crout.

En general, a la hora de obtener una descomposición $A = LU$, podemos fijar para cada i el valor de l_{ii} o de u_{ii} (pero no de ambos a la vez). Por ejemplo, podemos fijar los valores $u_{11} = 7$, $l_{22} = -2$, $u_{33} = 3$, y (resolviendo las ecuaciones correspondientes) obtener la descomposición

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & 0 & 0 \\ \frac{3}{7} & -2 & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{22}{41} & \frac{57}{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & \frac{49}{5} & \frac{42}{5} \\ 0 & \frac{41}{10} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que con la descomposición anterior también podríamos resolver el sistema $Ax = b$ mediante la resolución de los dos sistemas $Ly = b$, $Ux = y$. Igualmente, con esta descomposición también podemos calcular fácilmente el determinante de A. En este caso, sabíamos que $det(A) = -171$, y lo podemos calcular como

$$det(L)det(U) = \left[\frac{5}{7}\,(-2)\,\frac{57}{41}\right]\left[7\,\frac{41}{10}\,3\right]$$

Método de Choleski: Recuérdese que el que una matriz A sea definida positiva significa que $x^t Ax > 0$ para todo vector $x \neq 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0 \quad \text{si} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y que esto es equivalente a que todos los menores principales de la matriz sean positivos.

Método de Choleski: Recuérdese que el que una matriz A sea definida positiva significa que $x^t Ax > 0$ para todo vector $x \neq 0$, es decir

$$(x_1, \quad x_2, \quad \cdots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0 \quad \text{si} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y que esto es equivalente a que todos los menores principales de la matriz sean positivos. En el caso de que la matriz A sea simétrica y definida positiva, entonces un proceso similar al visto anteriormente permite descomponer A como $A = LL^t$, siendo L una matriz triangular inferior con los elementos de la diagonal positivos.

Método de Choleski: Recuérdese que el que una matriz A sea definida positiva significa que $x^t Ax > 0$ para todo vector $x \neq 0$, es decir

$$(x_1, \quad x_2, \quad \cdots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0 \quad \text{si} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y que esto es equivalente a que todos los menores principales de la matriz sean positivos. En el caso de que la matriz A sea simétrica y definida positiva, entonces un proceso similar al visto anteriormente permite descomponer A como $A = LL^t$, siendo L una matriz triangular inferior con los elementos de la diagonal positivos. Es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

es simétrica y definida positiva pues

$$a_{11} = 8 > 0, \quad det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} = 87 > 0, \quad det \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 58 > 0$$

Ejemplo: La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

es simétrica y definida positiva pues

$$a_{11} = 8 > 0, \quad det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} = 87 > 0, \quad det \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 58 > 0$$

Ejemplo: La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

es simétrica y definida positiva pues

$$a_{11} = 8 > 0, \quad det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} = 87 > 0, \quad det \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 58 > 0$$

Planteando las ecuaciones que se siguen de la igualdad

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

es simétrica y definida positiva pues

$$a_{11} = 8 > 0, \quad det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} = 87 > 0, \quad det \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 58 > 0$$

Planteando las ecuaciones que se siguen de la igualdad

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

se obtiene que

$$L = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{87}}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

es simétrica y definida positiva pues

$$a_{11} = 8 > 0, \quad det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} = 87 > 0, \quad det \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 58 > 0$$

Planteando las ecuaciones que se siguen de la igualdad

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

se obtiene que

$$L = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{87}}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Obsérvese que $det\ A = (det\ L)(det\ L^t) = (det\ L)^2 = \left(2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{87}}{2\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 58.$