Cálculo Numérico y Estadística

Primera parte: Cálculo Numérico

José Luis Bravo

Curso 2019/2020
Segundo semestre

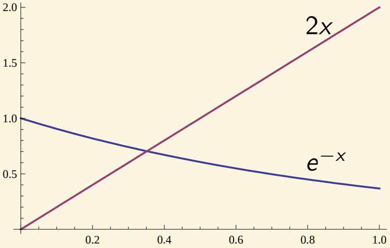
Introducción y resultados previos:

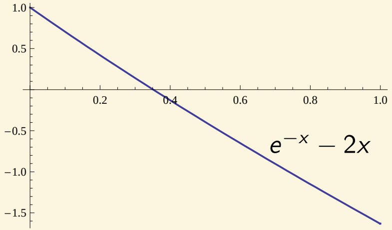
En muchas ocasiones tendremos la necesidad de encontrar las raíces de una determinada ecuación $f(x) = 0$. Dependiendo de como sea la función f, esta tarea puede no ser fácil. Puede ocurrir que, aún sabiendo que la ecuación tiene raíces, seamos incapaces de encontrarlas de forma directa, y tengamos que recurrir a métodos numéricos para aproximarlas.

Introducción y resultados previos:

En muchas ocasiones tendremos la necesidad de encontrar las raíces de una determinada ecuación $f(x) = 0$. Dependiendo de como sea la función f, esta tarea puede no ser fácil. Puede ocurrir que, aún sabiendo que la ecuación tiene raíces, seamos incapaces de encontrarlas de forma directa, y tengamos que recurrir a métodos numéricos para aproximarlas.

Por ejemplo, sabemos que la ecuación $e^{-x} = 2x$ (equiv., $e^{-x} - 2x = 0$) tiene una solución. ¿Pero cuál?





Introducción y resultados previos:

En muchas ocasiones tendremos la necesidad de encontrar las raíces de una determinada ecuación $f(x) = 0$. Dependiendo de como sea la función f, esta tarea puede no ser fácil. Puede ocurrir que, aún sabiendo que la ecuación tiene raíces, seamos incapaces de encontrarlas de forma directa, y tengamos que recurrir a métodos numéricos para aproximarlas.

En otras ocasiones, puede ocurrir que ni siquiera sepamos cuál es la función f, y que simplemente tengamos la capacidad de evaluarla. Por ejemplo, a cada valor que elijamos de x, una máquina (o un experimento) nos dice quien es $f(x)$.

Introducción y resultados previos:

En muchas ocasiones tendremos la necesidad de encontrar las raíces de una determinada ecuación $f(x) = 0$. Dependiendo de como sea la función f, esta tarea puede no ser fácil. Puede ocurrir que, aún sabiendo que la ecuación tiene raíces, seamos incapaces de encontrarlas de forma directa, y tengamos que recurrir a métodos numéricos para aproximarlas.

En otras ocasiones, puede ocurrir que ni siquiera sepamos cuál es la función f, y que simplemente tengamos la capacidad de evaluarla. Por ejemplo, a cada valor que elijamos de x, una máquina (o un experimento) nos dice quien es $f(x)$.

En este tema veremos diversos métodos de aproximar los valores x tales que $f(x) = 0$.

Antes de describir los diferentes métodos, debemos hacer algunas consideraciones:
1) Supondremos que la función $f(x)$ es continua.

Antes de describir los diferentes métodos, debemos hacer algunas consideraciones:

1) Supondremos que la función $f(x)$ es continua.

2) Supondremos que las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, que estamos buscando, están **aisladas**, es decir para cada una de ellas hay un intervalo de la recta en el que está ella sola.

Antes de describir los diferentes métodos, debemos hacer algunas consideraciones:

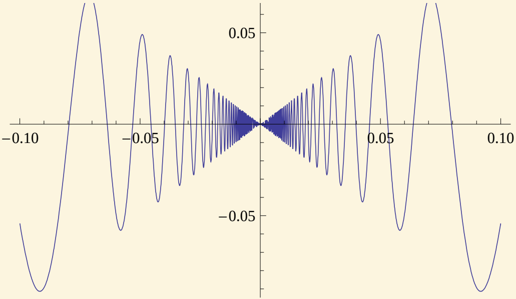
1) Supondremos que la función $f(x)$ es continua.

2) Supondremos que las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, que estamos buscando, están **aisladas**, es decir para cada una de ellas hay un intervalo de la recta en el que está ella sola.

Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua. La raíz $x = 0$ no es aislada, y todas las demás si.



Antes de describir los diferentes métodos, debemos hacer algunas consideraciones:
1) Supondremos que la función $f(x)$ es continua.
2) Supondremos que las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, que estamos buscando, están **aisladas**, es decir para cada una de ellas hay un intervalo de la recta en el que está ella sola.
3) Supondremos que conocemos un intervalo $[a, b]$ en el que hay una sola raíz de $f(x)$ (es decir, la raíz está separada en ese intervalo).

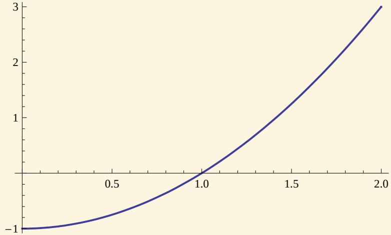
Antes de describir los diferentes métodos, debemos hacer algunas consideraciones:

1) Supondremos que la función $f(x)$ es continua.

2) Supondremos que las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, que estamos buscando, están **aisladas**, es decir para cada una de ellas hay un intervalo de la recta en el que está ella sola.

3) Supondremos que conocemos un intervalo $[a, b]$ en el que hay una sola raíz de $f(x)$ (es decir, la raíz está separada en ese intervalo).

Para esto, podemos utilizar el Teorema de Bolzano, que nos asegura que si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces f tiene al menos una raíz en (a, b).



Antes de describir los diferentes métodos, debemos hacer algunas consideraciones:

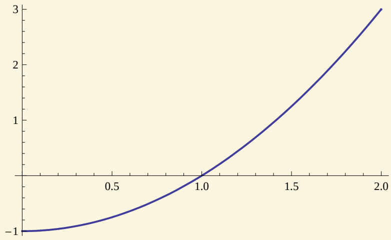
1) Supondremos que la función $f(x)$ es continua.

2) Supondremos que las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, que estamos buscando, están **aisladas**, es decir para cada una de ellas hay un intervalo de la recta en el que está ella sola.

3) Supondremos que conocemos un intervalo $[a, b]$ en el que hay una sola raíz de $f(x)$ (es decir, la raíz está separada en ese intervalo).

Para esto, podemos utilizar el Teorema de Bolzano, que nos asegura que si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces f tiene al menos una raíz en (a, b).

Si, además, se verifica que f' tiene signo constante en (a, b), entonces el Teorema de Rolle nos asegura que esa raíz es la única en (a, b).



Antes de describir los diferentes métodos, debemos hacer algunas consideraciones:

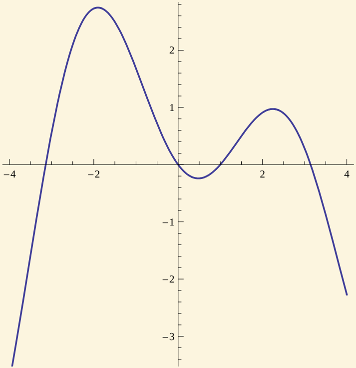
1) Supondremos que la función $f(x)$ es continua.

2) Supondremos que las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, que estamos buscando, están **aisladas**, es decir para cada una de ellas hay un intervalo de la recta en el que está ella sola.

3) Supondremos que conocemos un intervalo $[a, b]$ en el que hay una sola raíz de $f(x)$ (es decir, la raíz está separada en ese intervalo).

Para esto, podemos utilizar el Teorema de Bolzano, que nos asegura que si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces f tiene al menos una raíz en (a, b).

Si, además, se verifica que f' tiene signo constante en (a, b), entonces el Teorema de Rolle nos asegura que esa raíz es la única en (a, b).



Antes de describir los diferentes métodos, debemos hacer algunas consideraciones:

1) Supondremos que la función $f(x)$ es continua.

2) Supondremos que las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, que estamos buscando, están **aisladas**, es decir para cada una de ellas hay un intervalo de la recta en el que está ella sola.

3) Supondremos que conocemos un intervalo $[a, b]$ en el que hay una sola raíz de $f(x)$ (es decir, la raíz está separada en ese intervalo).

4) La raíz $\bar{x}$ de $f(x) = 0$, que ya tenemos aislada en el intervalo $[a, b]$, será el límite de una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{x}$) que calcularemos con un método iterativo.

Método de la bisección:

Supongamos que $f(x)$ es una función definida en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Por tanto en $[a, b]$ hay una raíz de $f(x) = 0$, que denotamos por $\bar{x}$. Supongamos, además, que $\bar{x}$ es la única raíz que $f(x)$ tiene en $[a, b]$.

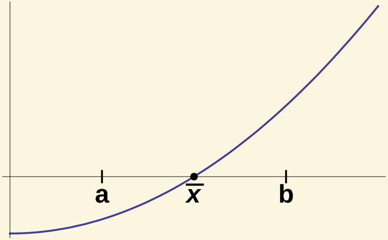
Método de la bisección:

Supongamos que $f(x)$ es una función definida en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Por tanto en $[a, b]$ hay una raíz de $f(x) = 0$, que denotamos por $\bar{x}$. Supongamos, además, que $\bar{x}$ es la única raíz que $f(x)$ tiene en $[a, b]$. Entonces puede ocurrir:

Método de la bisección:

Supongamos que $f(x)$ es una función definida en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Por tanto en $[a, b]$ hay una raíz de $f(x) = 0$, que denotamos por $\bar{x}$. Supongamos, además, que $\bar{x}$ es la única raíz que $f(x)$ tiene en $[a, b]$. Entonces puede ocurrir:

1) $f(\frac{a+b}{2}) = 0$. En este caso ya hemos encontrado la raíz: $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$. **FIN**



Método de la bisección:

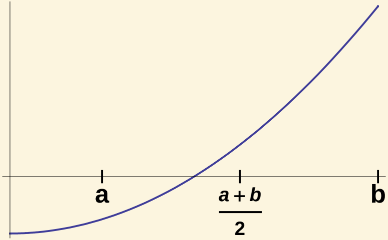
Supongamos que $f(x)$ es una función definida en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Por tanto en $[a, b]$ hay una raíz de $f(x) = 0$, que denotamos por $\bar{x}$. Supongamos, además, que $\bar{x}$ es la única raíz que $f(x)$ tiene en $[a, b]$. Entonces puede ocurrir:

1) $f(\frac{a+b}{2}) = 0$. En este caso ya hemos encontrado la raíz: $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$. **FIN**

2) $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$. En ese caso la raíz $\bar{x}$ estará en uno de los intervalos

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \qquad \left[\frac{a+b}{2}, b\right],$$

que será aquel en cuyos extremos f tome valores opuestos. Ese intervalo lo denotamos por $[a_1, b_1]$. Partiendo de $[a_1, b_1]$, construimos $[a_2, b_2]$, ...



Método de la bisección:

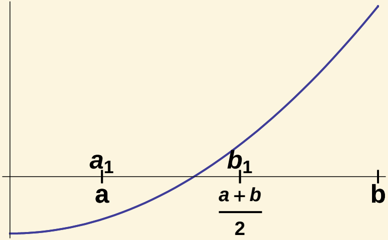
Supongamos que $f(x)$ es una función definida en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(a)f(b)<0$. Por tanto en $[a,b]$ hay una raíz de $f(x)=0$, que denotamos por $\bar{x}$. Supongamos, además, que $\bar{x}$ es la única raíz que $f(x)$ tiene en $[a,b]$. Entonces puede ocurrir:

1) $f(\frac{a+b}{2})=0$. En este caso ya hemos encontrado la raíz: $\bar{x}=\frac{a+b}{2}$. **FIN**

2) $f(\frac{a+b}{2})\neq 0$. En ese caso la raíz $\bar{x}$ estará en uno de los intervalos

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right], \qquad \left[\frac{a+b}{2},b\right],$$

que será aquel en cuyos extremos f tome valores opuestos. Ese intervalo lo denotamos por $[a_1,b_1]$. Partiendo de $[a_1,b_1]$, construimos $[a_2,b_2]$, ...



Método de la bisección:

Supongamos que $f(x)$ es una función definida en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Por tanto en $[a, b]$ hay una raíz de $f(x) = 0$, que denotamos por $\bar{x}$. Supongamos, además, que $\bar{x}$ es la única raíz que $f(x)$ tiene en $[a, b]$. Entonces puede ocurrir:

1) $f(\frac{a+b}{2}) = 0$. En este caso ya hemos encontrado la raíz: $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$. **FIN**

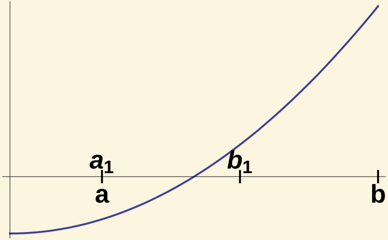
2) $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$. En ese caso la raíz $\bar{x}$ estará en uno de los intervalos

$$\left[a, \tfrac{a+b}{2}\right], \qquad \left[\tfrac{a+b}{2}, b\right],$$

que será aquel en cuyos extremos f tome valores opuestos. Ese intervalo lo denotamos por $[a_1, b_1]$. Partiendo de $[a_1, b_1]$, construimos $[a_2, b_2]$, ...

Continuando con este proceso, puede ocurrir que encontremos la raíz exacta o que construyamos una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$, encajados unos en otros, cuya longitud va siendo la mitad del anterior, y estando la raíz $\bar{x}$ en su interior. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \bar{x}.$$



Método de la bisección:

Supongamos que $f(x)$ es una función definida en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(a)f(b)<0$. Por tanto en $[a,b]$ hay una raíz de $f(x)=0$, que denotamos por $\bar{x}$. Supongamos, además, que $\bar{x}$ es la única raíz que $f(x)$ tiene en $[a,b]$. Entonces puede ocurrir:

1) $f(\frac{a+b}{2})=0$. En este caso ya hemos encontrado la raíz: $\bar{x}=\frac{a+b}{2}$. **FIN**

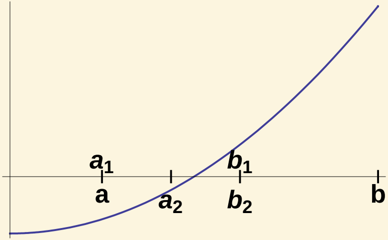
2) $f(\frac{a+b}{2})\neq 0$. En ese caso la raíz $\bar{x}$ estará en uno de los intervalos

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right], \qquad \left[\frac{a+b}{2},b\right],$$

que será aquel en cuyos extremos f tome valores opuestos. Ese intervalo lo denotamos por $[a_1,b_1]$. Partiendo de $[a_1,b_1]$, construimos $[a_2,b_2]$, ...

Continuando con este proceso, puede ocurrir que encontremos la raíz exacta o que construyamos una sucesión de intervalos $[a_n,b_n]$, encajados unos en otros, cuya longitud va siendo la mitad del anterior, y estando la raíz $\bar{x}$ en su interior. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \bar{x}.$$



Método de la bisección:

Supongamos que $f(x)$ es una función definida en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Por tanto en $[a, b]$ hay una raíz de $f(x) = 0$, que denotamos por $\bar{x}$. Supongamos, además, que $\bar{x}$ es la única raíz que $f(x)$ tiene en $[a, b]$. Entonces puede ocurrir:

1) $f(\frac{a+b}{2}) = 0$. En este caso ya hemos encontrado la raíz: $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$. **FIN**

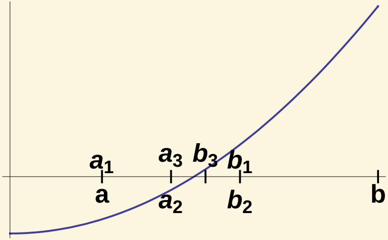
2) $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$. En ese caso la raíz $\bar{x}$ estará en uno de los intervalos

$$\left[a, \tfrac{a+b}{2}\right], \qquad \left[\tfrac{a+b}{2}, b\right],$$

que será aquel en cuyos extremos f tome valores opuestos. Ese intervalo lo denotamos por $[a_1, b_1]$. Partiendo de $[a_1, b_1]$, construimos $[a_2, b_2]$, ...

Continuando con este proceso, puede ocurrir que encontremos la raíz exacta o que construyamos una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$, encajados unos en otros, cuya longitud va siendo la mitad del anterior, y estando la raíz $\bar{x}$ en su interior. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \bar{x}.$$

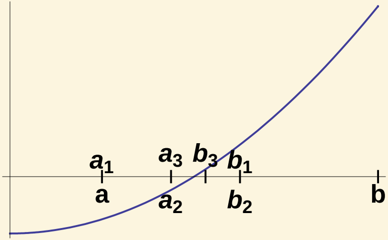


Método de la bisección:

En este caso, podemos tomar un cierto a_n ó b_n como aproximación de la raíz exacta $\bar{x}$.

Continuando con este proceso, puede ocurrir que encontremos la raíz exacta o que construyamos una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$, encajados unos en otros, cuya longitud va siendo la mitad del anterior, y estando la raíz $\bar{x}$ en su interior. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \bar{x}.$$



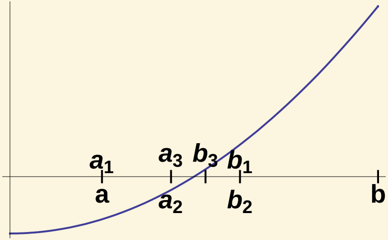
Método de la bisección:

En este caso, podemos tomar un cierto a_n ó b_n como aproximación de la raíz exacta $\bar{x}$. Si queremos aproximar $\bar{x}$ cometiendo un error menor que ε, tomamos

$$\tilde{x} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad \text{siendo} \qquad n > \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2} - 1$$

Continuando con este proceso, puede ocurrir que encontremos la raíz exacta o que construyamos una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$, encajados unos en otros, cuya longitud va siendo la mitad del anterior, y estando la raíz $\bar{x}$ en su interior. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \bar{x}.$$

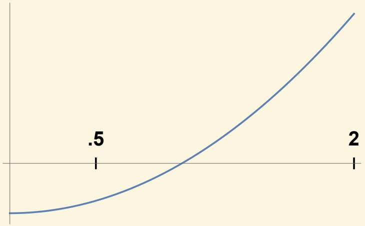


Método de la bisección:

En este caso, podemos tomar un cierto a_n ó b_n como aproximación de la raíz exacta $\bar{x}$. Si queremos aproximar $\bar{x}$ cometiendo un error menor que ε, tomamos

$$\tilde{x} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad \text{siendo} \qquad n > \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2} - 1$$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.

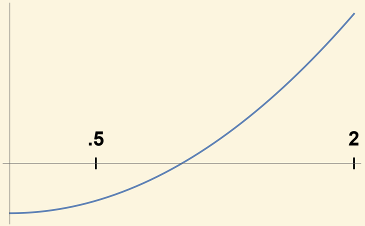


Método de la bisección:

En este caso, podemos tomar un cierto a_n ó b_n como aproximación de la raíz exacta $\bar{x}$. Si queremos aproximar $\bar{x}$ cometiendo un error menor que ε, tomamos

$$\tilde{x} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad \text{siendo} \qquad n > \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2} - 1$$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz.

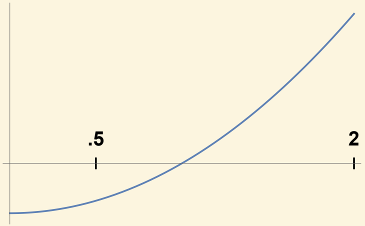


Método de la bisección:

En este caso, podemos tomar un cierto a_n ó b_n como aproximación de la raíz exacta $\bar{x}$. Si queremos aproximar $\bar{x}$ cometiendo un error menor que ε, tomamos

$$\tilde{x} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad \text{siendo} \qquad n > \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2} - 1$$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.



Método de la bisección:

En este caso, podemos tomar un cierto a_n ó b_n como aproximación de la raíz exacta $\bar{x}$. Si queremos aproximar $\bar{x}$ cometiendo un error menor que ε, tomamos

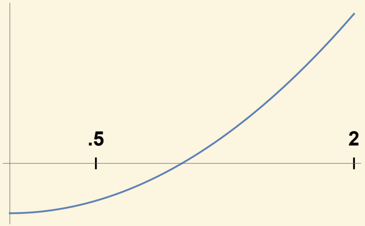
$$\tilde{x} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad \text{siendo} \qquad n > \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2} - 1$$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.

Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 =$$



Método de la bisección:

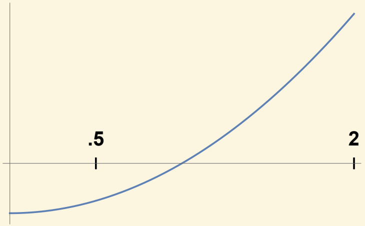
En este caso, podemos tomar un cierto a_n ó b_n como aproximación de la raíz exacta $\bar{x}$. Si queremos aproximar $\bar{x}$ cometiendo un error menor que ε, tomamos

$$\tilde{x} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad \text{siendo} \qquad n > \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2} - 1$$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$



Método de la bisección:

En este caso, podemos tomar un cierto a_n ó b_n como aproximación de la raíz exacta $\bar{x}$. Si queremos aproximar $\bar{x}$ cometiendo un error menor que ε, tomamos

$$\tilde{x} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad \text{siendo} \qquad n > \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2} - 1$$

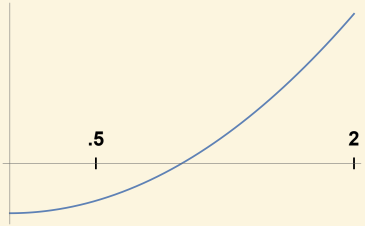
Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.

Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n =$



Método de la bisección:

En este caso, podemos tomar un cierto a_n ó b_n como aproximación de la raíz exacta $\bar{x}$. Si queremos aproximar $\bar{x}$ cometiendo un error menor que ε, tomamos

$$\tilde{x} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad \text{siendo} \qquad n > \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2} - 1$$

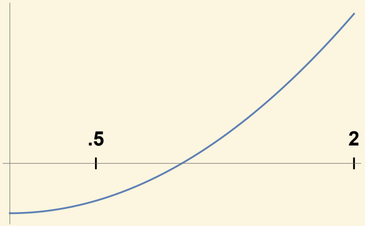
Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.

Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$.



Método de la bisección:

En este caso, podemos tomar un cierto a_n ó b_n como aproximación de la raíz exacta $\bar{x}$. Si queremos aproximar $\bar{x}$ cometiendo un error menor que ε, tomamos

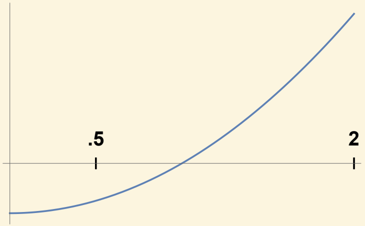
$$\tilde{x} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad \text{siendo} \qquad n > \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2} - 1$$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



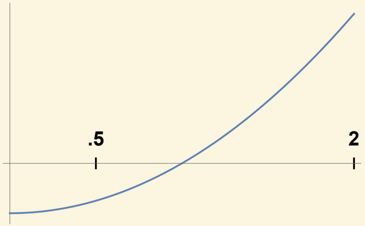
$f(a) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b) = f(2) = 3 > 0$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



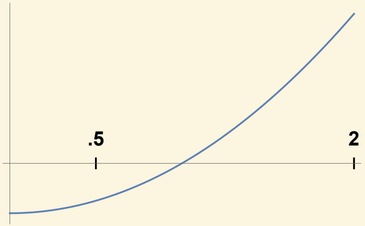
$f(a) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b) = f(2) = 3 > 0$
$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+2}{2}\right) = f(1.25) =$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



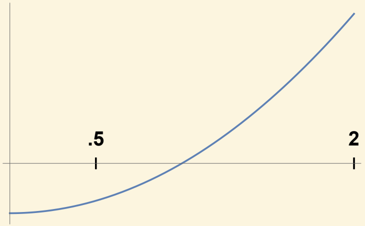
$f(a) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b) = f(2) = 3 > 0$
$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+2}{2}\right) = f(1.25) = 0.5625$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



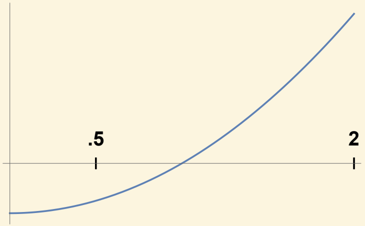
$f(a) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b) = f(2) = 3 > 0$
$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+2}{2}\right) = f(1.25) = 0.5625$ $\rightarrow$ $\begin{cases} a_1 = \\ b_1 = \end{cases}$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



$f(a) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b) = f(2) = 3 > 0$
$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+2}{2}\right) = f(1.25) = 0.5625$

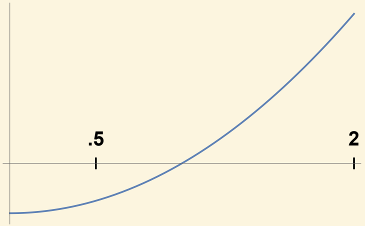
$$\rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = a = 0.5 \\ b_1 = \end{cases}$$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



$f(a) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b) = f(2) = 3 > 0$
$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+2}{2}\right) = f(1.25) = 0.5625$

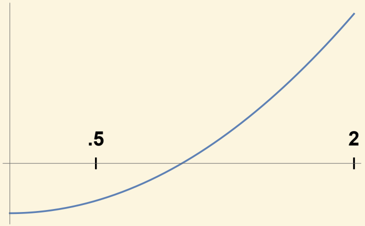
$\rightarrow \begin{cases} a_1 = a = 0.5 \\ b_1 = \frac{a+b}{2} = 1.25 \end{cases}$

<u>Ejemplo</u>: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



$$f(a) = f(0.5) = -0.75 < 0$$
$$f(b) = f(2) = 3 > 0$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+2}{2}\right) = f(1.25) = 0.5625 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = a = 0.5 \\ b_1 = \frac{a+b}{2} = 1.25 \end{cases}$$

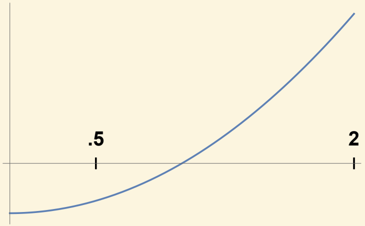
$$f(a_1) = f(0.5) = -0.75 < 0$$
$$f(b_1) = f(1.25) = 0.5625 > 0$$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



$f(a) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b) = f(2) = 3 > 0$
$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+2}{2}\right) = f(1.25) = 0.5625$ $\rightarrow$ $\begin{cases} a_1 = a = 0.5 \\ b_1 = \frac{a+b}{2} = 1.25 \end{cases}$

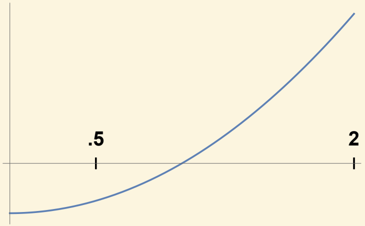
$f(a_1) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b_1) = f(1.25) = 0.5625 > 0$
$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+1.25}{2}\right) = f(0.875) =$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



$f(a) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b) = f(2) = 3 > 0$
$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+2}{2}\right) = f(1.25) = 0.5625$ $\rightarrow$ $\begin{cases} a_1 = a = 0.5 \\ b_1 = \frac{a+b}{2} = 1.25 \end{cases}$

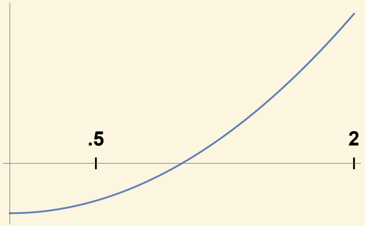
$f(a_1) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b_1) = f(1.25) = 0.5625 > 0$
$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+1.25}{2}\right) = f(0.875) = -\,0.234375$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



$$f(a) = f(0.5) = -0.75 < 0$$
$$f(b) = f(2) = 3 > 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} a_1 = a = 0.5 \\ b_1 = \frac{a+b}{2} = 1.25 \end{cases}$$
$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) = f\left(\tfrac{0.5+2}{2}\right) = f(1.25) = 0.5625$$

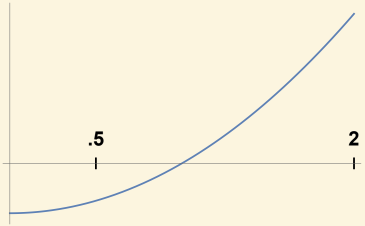
$$f(a_1) = f(0.5) = -0.75 < 0$$
$$f(b_1) = f(1.25) = 0.5625 > 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} a_2 = \\ b_2 = \end{cases}$$
$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\tfrac{0.5+1.25}{2}\right) = f(0.875) = -\,0.234375$$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3+b_3}{2}$



$$f(a) = f(0.5) = -0.75 < 0$$
$$f(b) = f(2) = 3 > 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} a_1 = a = 0.5 \\ b_1 = \frac{a+b}{2} = 1.25 \end{cases}$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+2}{2}\right) = f(1.25) = 0.5625$$

$$f(a_1) = f(0.5) = -0.75 < 0$$
$$f(b_1) = f(1.25) = 0.5625 > 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 0.875 \\ b_2 = \end{cases}$$
$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+1.25}{2}\right) = f(0.875) = -\,0.234375$$

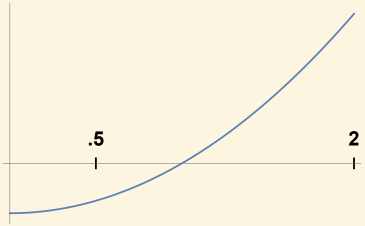
Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.

Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



$$f(a) = f(0.5) = -0.75 < 0$$
$$f(b) = f(2) = 3 > 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} a_1 = a = 0.5 \\ b_1 = \frac{a+b}{2} = 1.25 \end{cases}$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+2}{2}\right) = f(1.25) = 0.5625$$

$$f(a_1) = f(0.5) = -0.75 < 0$$
$$f(b_1) = f(1.25) = 0.5625 > 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 0.875 \\ b_2 = b_1 = 1.25 \end{cases}$$
$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+1.25}{2}\right) = f(0.875) = -\,0.234375$$

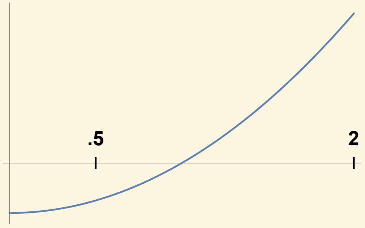
Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.

Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



$f(a_2) = f(0.875) = -0.234375 < 0$
$f(b_2) = f(1.25) = 0.5625 > 0$

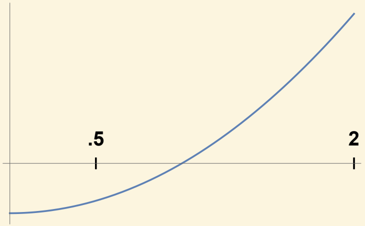
$f(a_1) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b_1) = f(1.25) = 0.5625 > 0$
$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+1.25}{2}\right) = f(0.875) = -0.234375 \rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 0.875 \\ b_2 = b_1 = 1.25 \end{cases}$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



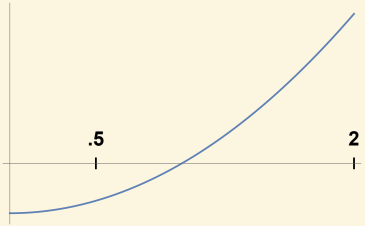
$f(a_2) = f(0.875) = -0.234375 < 0$
$f(b_2) = f(1.25) = 0.5625 > 0$
$f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = f\left(\frac{0.875+1.25}{2}\right) = f(1.0625) =$
$f(a_1) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b_1) = f(1.25) = 0.5625 > 0$
$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+1.25}{2}\right) = f(0.875) = -0.234375 \rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 0.875 \\ b_2 = b_1 = 1.25 \end{cases}$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3+b_3}{2}$



$f(a_2) = f(0.875) = -0.234375 < 0$
$f(b_2) = f(1.25) = 0.5625 > 0$
$f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = f\left(\frac{0.875+1.25}{2}\right) = f(1.0625) = 0.128906$

$f(a_1) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b_1) = f(1.25) = 0.5625 > 0$
$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+1.25}{2}\right) = f(0.875) = -0.234375 \rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 0.875 \\ b_2 = b_1 = 1.25 \end{cases}$

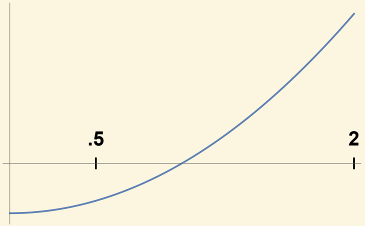
Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.

Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



$$f(a_2) = f(0.875) = -0.234375 < 0$$
$$f(b_2) = f(1.25) = 0.5625 > 0$$
$$f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = f\left(\frac{0.875+1.25}{2}\right) = f(1.0625) = 0.128906 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a_3 = \\ b_3 = \end{cases}$$

$$f(a_1) = f(0.5) = -0.75 < 0$$
$$f(b_1) = f(1.25) = 0.5625 > 0$$
$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+1.25}{2}\right) = f(0.875) = -\,0.234375 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 0.875 \\ b_2 = b_1 = 1.25 \end{cases}$$

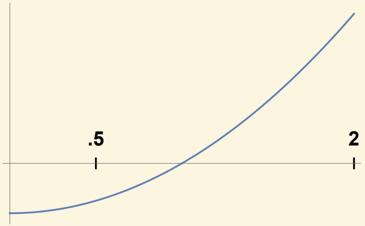
Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.

Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



$f(a_2) = f(0.875) = -0.234375 < 0$
$f(b_2) = f(1.25) = 0.5625 > 0$
$f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = f\left(\frac{0.875+1.25}{2}\right) = f(1.0625) = 0.128906$
$\rightarrow \begin{cases} a_3 = a_2 = 0.875 \\ b_3 = \end{cases}$

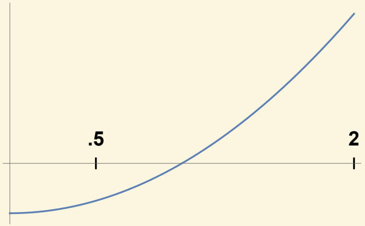
$f(a_1) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b_1) = f(1.25) = 0.5625 > 0$
$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+1.25}{2}\right) = f(0.875) = -0.234375$
$\rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 0.875 \\ b_2 = b_1 = 1.25 \end{cases}$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



$f(a_2) = f(0.875) = -0.234375 < 0$
$f(b_2) = f(1.25) = 0.5625 > 0$
$f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = f\left(\frac{0.875+1.25}{2}\right) = f(1.0625) = 0.128906$ $\rightarrow$ $\begin{cases} a_3 = a_2 = 0.875 \\ b_3 = \frac{a_2+b_2}{2} = 1.0625 \end{cases}$

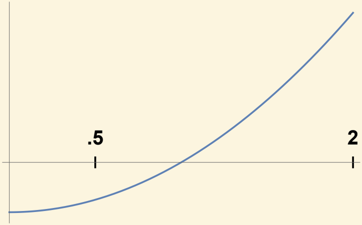
$f(a_1) = f(0.5) = -0.75 < 0$
$f(b_1) = f(1.25) = 0.5625 > 0$
$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{0.5+1.25}{2}\right) = f(0.875) = -\,0.234375$ $\rightarrow$ $\begin{cases} a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 0.875 \\ b_2 = b_1 = 1.25 \end{cases}$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$



$f(a_2) = f(0.875) = -0.234375 < 0$
$f(b_2) = f(1.25) = 0.5625 > 0$
$f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = f\left(\frac{0.875+1.25}{2}\right) = f(1.0625) = 0.128906$ $\rightarrow$ $\begin{cases} a_3 = a_2 = 0.875 \\ b_3 = \frac{a_2+b_2}{2} = 1.0625 \end{cases}$

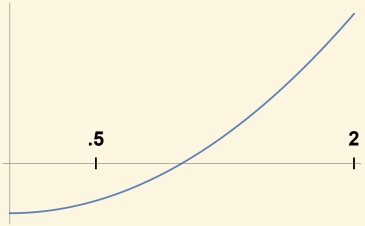
Por tanto, la aproximación buscada es $\tilde{x} = \frac{a_3+b_3}{2} = 0.96875$.

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3+b_3}{2}$



$f(a_2) = f(0.875) = -0.234375 < 0$
$f(b_2) = f(1.25) = 0.5625 > 0$
$f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = f\left(\frac{0.875+1.25}{2}\right) = f(1.0625) = 0.128906$ $\rightarrow$ $\begin{cases} a_3 = a_2 = 0.875 \\ b_3 = \frac{a_2+b_2}{2} = 1.0625 \end{cases}$

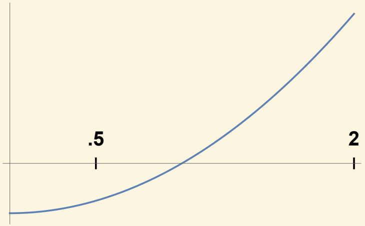
Por tanto, la aproximación buscada es $\tilde{x} = \frac{a_3+b_3}{2} = 0.96875$.
La raíz exacta es $\bar{x} = 1$, por lo que el error cometido en la aproximación es $|\bar{x} - \tilde{x}| = |1 - 0.96875| = 0.03125 < 0.1 = \varepsilon$, como se deseaba.

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$.
Sabemos que $f(0.5) = -0.75 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. Por tanto, en $[0.5, 2]$ tiene una raíz. Además, $f'(x) = 2x$ no cambia de signo en $[0.5, 2]$. Por tanto en este intervalo tiene solo una raíz.

Vamos a aproximar esa raíz cometiendo un error $\varepsilon < 0.1$. Para eso tomamos

$$n > \frac{\ln(2-0.5) - \ln 0.1}{\ln 2} - 1 = 2.90689$$

es decir, $n = 3$. Vamos a calcular $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. La aproximación será $\tilde{x} = \dfrac{a_3+b_3}{2}$



Ejercicio 1: En el ejemplo anterior calcular el n necesario para que el error que se cometa con la aproximación sea menor que 0.01. Calcular dicha aproximación.

Ejercicio 2: Sabemos que la función $f(x) = e^{-x} - 2x$ tiene una única raíz en el intervalo $[0.2, 0.6]$, pues $f(0.2) = 0.418731 > 0$, $f(0.6) = -0.651188 < 0$ y $f'(x) = -2 - e^{-x}$ no cambia de signo en ese intervalo. Calcular, aplicando el método de biyección, una aproximación de la raíz cometiendo un error menor que 0.01.

Solución Ejercicio 1: $n > \dfrac{\ln(2-0.5) - \ln 0.01}{\ln 2} - 1 = 6.22882 \ \rightarrow \ n = 7.$

Considerando cuatro cifras decimales:

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	$\frac{a_n+b_n}{2}$	$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$
0	0.5	-0.75	2	3	1.25	0.5625
1	0.5	-0.75	1.25	0.5625	0.875	-0.2344
2	0.875	-0.2344	1.25	0.5625	1.0625	0.1289
3	0.875	-0.2344	1.0625	0.1289	0.9688	-0.0614
4	0.9688	-0.0614	1.0625	0.1289	1.0157	0.0317
5	0.9688	-0.0614	1.0157	0.0317	0.9923	-0.0153
6	0.9923	-0.0153	1.0157	0.0317	1.004	0.008
7	0.9923	-0.0153	1.004	0.008		

La aproximación pedida es $\tilde{x} = \frac{a_7+b_7}{2} = 0.9982.$

Como sabemos que la solución exacta es $\bar{x} = 1$, podemos comprobar que el error cometido es, efectivamente, menor que 0.01:

$|\tilde{x} - \bar{x}| = |0.9982 - 1| = 0.0018 < 0.01$

Solución Ejercicio 2: $n > \dfrac{\ln(0.6-0.2)-\ln 0.01}{\ln 2} - 1 = 4.3219 \;\; \to \;\; n = 5.$

Considerando cuatro cifras decimales:

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	$\frac{a_n+b_n}{2}$	$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$
0	0.2	0.4187	0.6	-0.6512	0.4	-0.1297
1	0.2	0.4187	0.4	-0.1297	0.3	0.1408
2	0.3	0.1408	0.4	-0.1297	0.35	0.0047
3	0.35	0.0047	0.4	-0.1297	0.375	-0.0627
4	0.35	0.0047	0.375	-0.0627	0.3625	-0.0291
5	0.35	0.0047	0.3625	-0.0291		

La aproximación pedida es $\tilde{x} = \frac{a_5+b_5}{2} = 0.35625$.

En este caso, no sabemos la solución exacta $\bar{x}$, pero tenemos que

$f(\tilde{x}+0.01) = -0.0391706 < 0, \quad f(\tilde{x}-0.01) = 0.0148356 > 0,$

con lo que podemos asegurar que $\bar{x}$ está en el intervalo $(\tilde{x}-0.01, \tilde{x}+0.01)$, con lo que, efectivamente, $|\tilde{x}-\bar{x}| < 0.01$.