Cálculo Numérico y Estadística

Primera parte: Cálculo Numérico

José Luis Bravo

Curso 2019/2020
Segundo semestre

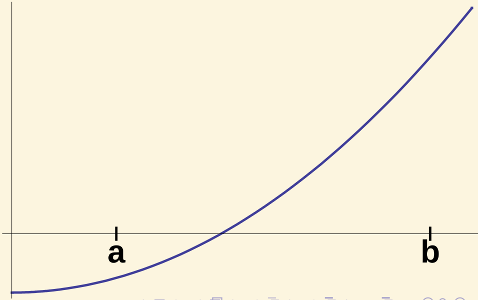
Método de Newton:

Para garantizar la convergencia del método que describiremos a continuación, supondremos que la función f, definida en $[a, b]$, cumple las siguientes condiciones:

1) $f \in C^2([a, b])$, es decir, $f''(x)$ existe y es continua en (a, b).

2) $f(a)f(b) < 0$.

3) f' y f'' tienen signo constante en $[a, b]$, no necesariamente el mismo.



Método de Newton:

Para garantizar la convergencia del método que describiremos a continuación, supondremos que la función f, definida en $[a, b]$, cumple las siguientes condiciones:

1) $f \in C^2([a, b])$, es decir, $f''(x)$ existe y es continua en (a, b).

2) $f(a)f(b) < 0$.

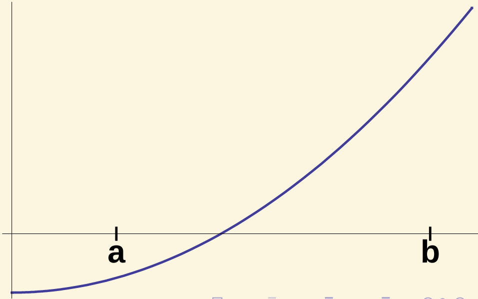
3) f' y f'' tienen signo constante en $[a, b]$, no necesariamente el mismo.

Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\text{sign}\, f(x_0) = \text{sign}\, f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \;\; n = 0, 1, \ldots$$



Método de Newton:

Para garantizar la convergencia del método que describiremos a continuación, supondremos que la función f, definida en $[a, b]$, cumple las siguientes condiciones:

1) $f \in C^2([a, b])$, es decir, $f''(x)$ existe y es continua en (a, b).

2) $f(a)f(b) < 0$.

3) f' y f'' tienen signo constante en $[a, b]$, no necesariamente el mismo.

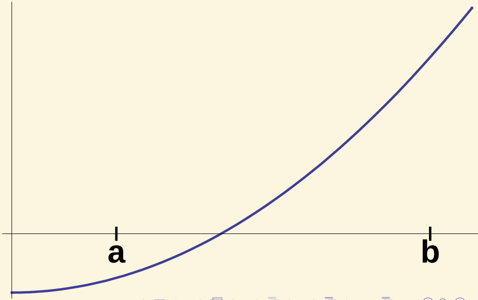
<u>Aplicación del método</u>:

a) Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\text{sign } f(x_0) = \text{sign } f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.



Método de Newton:

Para garantizar la convergencia del método que describiremos a continuación, supondremos que la función f, definida en $[a, b]$, cumple las siguientes condiciones:

1) $f \in C^2([a, b])$, es decir, $f''(x)$ existe y es continua en (a, b).

2) $f(a)f(b) < 0$.

3) f' y f'' tienen signo constante en $[a, b]$, no necesariamente el mismo.

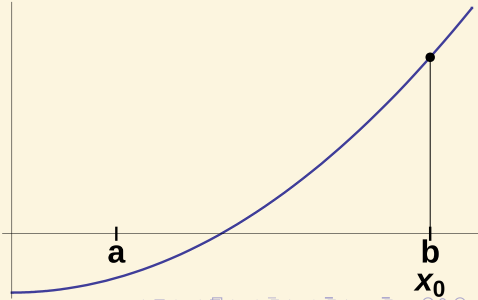
Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.



Método de Newton:

Para garantizar la convergencia del método que describiremos a continuación, supondremos que la función f, definida en $[a, b]$, cumple las siguientes condiciones:

1) $f \in C^2([a, b])$, es decir, $f''(x)$ existe y es continua en (a, b).

2) $f(a)f(b) < 0$.

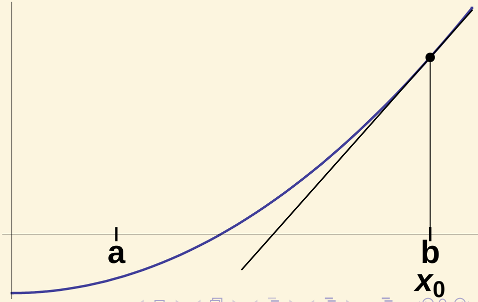
3) f' y f'' tienen signo constante en $[a, b]$, no necesariamente el mismo.

Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique sign $f(x_0) =$ sign $f''(x_0)$.
b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \;\; n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.



Método de Newton:

Para garantizar la convergencia del método que describiremos a continuación, supondremos que la función f, definida en $[a, b]$, cumple las siguientes condiciones:

1) $f \in C^2([a, b])$, es decir, $f''(x)$ existe y es continua en (a, b).

2) $f(a)f(b) < 0$.

3) f' y f'' tienen signo constante en $[a, b]$, no necesariamente el mismo.

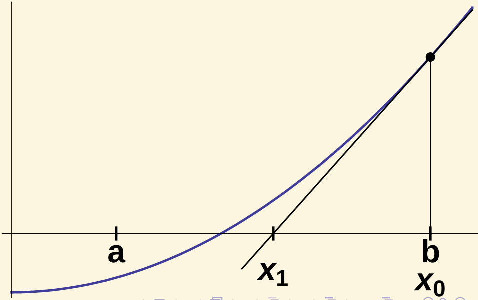
Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.



Método de Newton:

Para garantizar la convergencia del método que describiremos a continuación, supondremos que la función f, definida en $[a, b]$, cumple las siguientes condiciones:

1) $f \in C^2([a, b])$, es decir, $f''(x)$ existe y es continua en (a, b).

2) $f(a)f(b) < 0$.

3) f' y f'' tienen signo constante en $[a, b]$, no necesariamente el mismo.

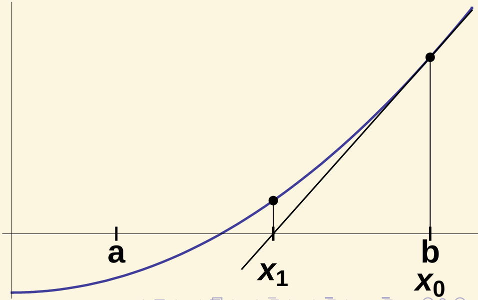
Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique sign $f(x_0) =$ sign $f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.



Método de Newton:

Para garantizar la convergencia del método que describiremos a continuación, supondremos que la función f, definida en $[a,b]$, cumple las siguientes condiciones:

1) $f \in C^2([a,b])$, es decir, $f''(x)$ existe y es continua en (a,b).

2) $f(a)f(b) < 0$.

3) f' y f'' tienen signo constante en $[a,b]$, no necesariamente el mismo.

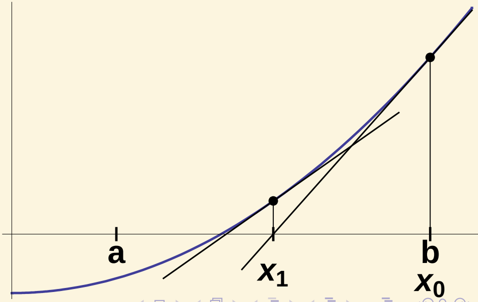
Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a,b]$, que verifique $\text{sign}\, f(x_0) = \text{sign}\, f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.



Método de Newton:

Para garantizar la convergencia del método que describiremos a continuación, supondremos que la función f, definida en $[a,b]$, cumple las siguientes condiciones:

1) $f \in C^2([a,b])$, es decir, $f''(x)$ existe y es continua en (a,b).

2) $f(a)f(b) < 0$.

3) f' y f'' tienen signo constante en $[a,b]$, no necesariamente el mismo.

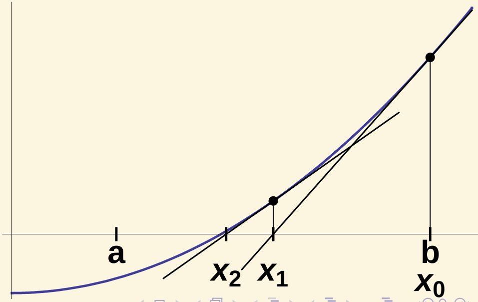
Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a,b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.



Método de Newton:

Para garantizar la convergencia del método que describiremos a continuación, supondremos que la función f, definida en $[a,b]$, cumple las siguientes condiciones:

1) $f \in C^2([a,b])$, es decir, $f''(x)$ existe y es continua en (a,b).

2) $f(a)f(b) < 0$.

3) f' y f'' tienen signo constante en $[a,b]$, no necesariamente el mismo.

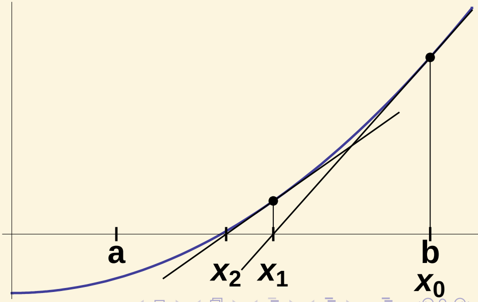
Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a,b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas. Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, raíz de f.



Método de Newton:

Para garantizar la convergencia del método que describiremos a continuación, supondremos que la función f, definida en $[a,b]$, cumple las siguientes condiciones:

1) $f \in C^2([a,b])$, es decir, $f''(x)$ existe y es continua en (a,b).

2) $f(a)f(b) < 0$.

3) f' y f'' tienen signo constante en $[a,b]$, no necesariamente el mismo.

Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a,b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \;\; n = 0, 1, \dots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.

Entonces, $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, raíz de f.

¿Cuándo paramos?:

Método de Newton:

Para garantizar la convergencia del método que describiremos a continuación, supondremos que la función f, definida en $[a,b]$, cumple las siguientes condiciones:

1) $f \in C^2([a,b])$, es decir, $f''(x)$ existe y es continua en (a,b).

2) $f(a)f(b) < 0$.

3) f' y f'' tienen signo constante en $[a,b]$, no necesariamente el mismo.

Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a,b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.

Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, raíz de f.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio:

Método de Newton:

Para garantizar la convergencia del método que describiremos a continuación, supondremos que la función f, definida en $[a, b]$, cumple las siguientes condiciones:

1) $f \in C^2([a, b])$, es decir, $f''(x)$ existe y es continua en (a, b).

2) $f(a)f(b) < 0$.

3) f' y f'' tienen signo constante en $[a, b]$, no necesariamente el mismo.

Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\text{sign}\, f(x_0) = \text{sign}\, f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \;\; n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas. Entonces, $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, raíz de f.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si $m = \min_{a\leq x\leq b} |f'(x)|$, y $M = \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$, entonces $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Método de Newton:

Para garantizar la convergencia del método que describiremos a continuación, supondremos que la función f, definida en $[a,b]$, cumple las siguientes condiciones:

1) $f \in C^2([a,b])$, es decir, $f''(x)$ existe y es continua en (a,b).

2) $f(a)f(b) < 0$.

3) f' y f'' tienen signo constante en $[a,b]$, no necesariamente el mismo.

Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a,b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.

Entonces, $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, raíz de f.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si

$m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|$, y

$M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$, entonces

$|x_n - \bar{x}| \le \frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$. Veamos que se verifican las hipótesis:

Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas. Entonces, $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, raíz de f.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si $m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|$, y $M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$, entonces

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$. Veamos que se verifican las hipótesis:

1) $f \in C^2([0.5, 2])$:

2) $f(0.5)f(2) < 0$:

3) f' y f'' tienen signo constante en $[0.5, 2]$, no necesariamente el mismo:

Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas. Entonces, $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, raíz de f.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si

$m = \min_{a\leq x\leq b} |f'(x)|$, y

$M = \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$, entonces

$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$. Veamos que se verifican las hipótesis:

1) $f \in C^2([0.5, 2])$: $f(x)$ es un polinomio, por tanto de clase infinita.

2) $f(0.5)f(2) < 0$:

3) f' y f'' tienen signo constante en $[0.5, 2]$, no necesariamente el mismo:

Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas. Entonces, $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, raíz de f.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si $m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|$, y $M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$, entonces

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$. Veamos que se verifican las hipótesis:

1) $f \in C^2([0.5, 2])$: $f(x)$ es un polinomio, por tanto de clase infinita.

2) $f(0.5)f(2) < 0$: $f(0.5)f(2) = (-0.75)(3) < 0$

3) f' y f'' tienen signo constante en $[0.5, 2]$, no necesariamente el mismo:

Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\text{sign}\, f(x_0) = \text{sign}\, f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas. Entonces, $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, raíz de f.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si

$m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|$, y

$M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$, entonces

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$. Veamos que se verifican las hipótesis:

1) $f \in C^2([0.5, 2])$: $f(x)$ es un polinomio, por tanto de clase infinita.

2) $f(0.5)f(2) < 0$: $f(0.5)f(2) = (-0.75)(3) < 0$

3) f' y f'' tienen signo constante en $[0.5, 2]$, no necesariamente el mismo: En este caso $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, por lo que las dos funciones son positivas en este intervalo.

Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$.

b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas. Entonces, $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, raíz de f.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si

$m = \min_{a\leq x\leq b} |f'(x)|$, y

$M = \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$, entonces

$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método:
a) Elegimos $x_0 \in [0.5, 2]$ tal que $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$. Por ejemplo, $x_0 = 2$ ($f(2) = 3$, $f''(2) = 2$).

Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$.
b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas. Entonces, $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, raíz de f.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si $m = \min_{a\leq x\leq b} |f'(x)|$, y $M = \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$, entonces $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$
Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método:
a) Elegimos $x_0 \in [0.5, 2]$ tal que $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$. Por ejemplo, $x_0 = 2$ ($f(2) = 3$, $f''(2) = 2$).
b) Generamos la sucesión $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \ldots$, es decir,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 1}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n}.$$

Aplicación del método:

a) Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$.
b) Generamos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas. Entonces, $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, raíz de f.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si
$m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|$, y
$M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$, entonces
$|x_n - \bar{x}| \le \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$
Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.

Aplicamos el método:

a) Elegimos $x_0 \in [0.5, 2]$ tal que $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$. Por ejemplo, $x_0 = 2$ ($f(2) = 3$, $f''(2) = 2$).

b) Generamos la sucesión $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \ldots$, es decir,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 1}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n}.$$ Por tanto,

$x_1 =$

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si

$m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$, y

$M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$, entonces

$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método:

a) Elegimos $x_0 \in [0.5, 2]$ tal que $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$. Por ejemplo, $x_0 = 2$ $(f(2) = 3,\ f''(2) = 2)$.

b) Generamos la sucesión $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \ldots$, es decir,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 1}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n}.$$ Por tanto,

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si
$m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|$, y
$M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$, entonces
$|x_n - \bar{x}| \le \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$
Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método:

a) Elegimos $x_0 \in [0.5, 2]$ tal que $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$. Por ejemplo, $x_0 = 2$ $(f(2) = 3,\ f''(2) = 2)$.

b) Generamos la sucesión $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \ldots$, es decir,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 1}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n}.$$ Por tanto,

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 =$$

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si $m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|$, y $M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$, entonces

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método:

a) Elegimos $x_0 \in [0.5, 2]$ tal que $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$. Por ejemplo, $x_0 = 2$ $(f(2) = 3,\ f''(2) = 2)$.

b) Generamos la sucesión $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \dots$, es decir,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 1}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n}.$$ Por tanto,

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si

$m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$, y

$M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$, entonces

$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método:

a) Elegimos $x_0 \in [0.5, 2]$ tal que $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$. Por ejemplo, $x_0 = 2$ ($f(2) = 3$, $f''(2) = 2$).

b) Generamos la sucesión $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \ldots$, es decir,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 1}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n}.$$ Por tanto,

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

$$x_3 =$$

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si
$m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|$, y
$M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$, entonces
$|x_n - \bar{x}| \le \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$
Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método:

a) Elegimos $x_0 \in [0.5, 2]$ tal que $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$. Por ejemplo, $x_0 = 2$ $(f(2) = 3,\ f''(2) = 2)$.

b) Generamos la sucesión $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \ldots$, es decir,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 1}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n}.$$ Por tanto,

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 1}{2x_2} = \frac{3281}{3280} = 1.0003048$$

$\vdots$ Etc.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si
$m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$, y
$M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$, entonces
$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$
Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método:

a) Elegimos $x_0 \in [0.5, 2]$ tal que $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$. Por ejemplo, $x_0 = 2$ $(f(2) = 3,\ f''(2) = 2)$.

b) Generamos la sucesión $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \ldots$, es decir,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 1}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n}.$$ Por tanto,

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 1}{2x_2} = \frac{3281}{3280} = 1.0003048$$

$\vdots$ Etc.

Como puede verse, el método es mucho más rápido que el de bisección.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si $m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|$, y $M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$, entonces
$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$$
Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método:

c) Supongamos ahora que queremos aproximar hasta que $|x_n - \bar{x}| < 10^{-6}$.
¿Cuántas iteraciones tenemos que hacer?:

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 1}{2x_2} = \frac{3281}{3280} = 1.0003048$$

$\vdots$ Etc.

Como puede verse, el método es mucho más rápido que el de bisección.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si

$m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$, y

$M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$, entonces

$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método: $f'(x) = 2x$,

c) Supongamos ahora que queremos aproximar hasta que $|x_n - \bar{x}| < 10^{-6}$.
¿Cuántas iteraciones tenemos que hacer?:

$$m = \min_{0.5 \leq x \leq 2} |2x| =$$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 1}{2x_2} = \frac{3281}{3280} = 1.0003048$$

⋮ Etc.

Como puede verse, el método es mucho más rápido que el de bisección.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si

$m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$, y

$M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$, entonces

$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método: $f'(x) = 2x$,

c) Supongamos ahora que queremos aproximar hasta que $|x_n - \bar{x}| < 10^{-6}$. ¿Cuántas iteraciones tenemos que hacer?:

$$m = \min_{0.5 \leq x \leq 2} |2x| = 2 \cdot 0.5 = 1,$$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 1}{2x_2} = \frac{3281}{3280} = 1.0003048$$

$\vdots$ Etc.

Como puede verse, el método es mucho más rápido que el de bisección.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si

$m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$, y

$M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$, entonces

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método: $f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2$

c) Supongamos ahora que queremos aproximar hasta que $|x_n - \bar{x}| < 10^{-6}$.
¿Cuántas iteraciones tenemos que hacer?:

$$m = \min_{0.5 \le x \le 2} |2x| = 2 \cdot 0.5 = 1, \qquad M = \max_{0.5 \le x \le 2} |2| =$$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 1}{2x_2} = \frac{3281}{3280} = 1.0003048$$

$\vdots$ Etc.

Como puede verse, el método es mucho más rápido que el de bisección.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si
$m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|$, y
$M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$, entonces
$|x_n - \bar{x}| \le \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$
Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método: $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$

c) Supongamos ahora que queremos aproximar hasta que $|x_n - \bar{x}| < 10^{-6}$.
¿Cuántas iteraciones tenemos que hacer?:

$$m = \min_{0.5 \leq x \leq 2} |2x| = 2 \cdot 0.5 = 1, \quad M = \max_{0.5 \leq x \leq 2} |2| = 2,$$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 1}{2x_2} = \frac{3281}{3280} = 1.0003048$$

⋮ Etc.

Como puede verse, el método es mucho más rápido que el de bisección.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si $m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$, y $M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$, entonces

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método: $f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2$

c) Supongamos ahora que queremos aproximar hasta que $|x_n - \bar{x}| < 10^{-6}$. ¿Cuántas iteraciones tenemos que hacer?:

$m = \min\limits_{0.5 \le x \le 2} |2x| = 2 \cdot 0.5 = 1, \quad M = \max\limits_{0.5 \le x \le 2} |2| = 2,$ Por tanto, tiene que ser $\frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 = |x_n - x_{n-1}|^2 < 10^{-6} \ \rightarrow \ |x_n - x_{n-1}| < 10^{-3}$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 1}{2x_2} = \frac{3281}{3280} = 1.0003048$$

$\vdots$ Etc.

Como puede verse, el método es mucho más rápido que el de bisección.

¿Cuándo paramos?: Podemos parar la iteración cuando consideremos que $f(x_n)$ es suficientemente pequeño, o utilizar el siguiente criterio: Si

$m = \min\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$, y

$M = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$, entonces

$|x_n - \bar{x}| \le \frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$

Elegimos n de forma que la expresión anterior sea $< \varepsilon$.

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método: $f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2$

c) Supongamos ahora que queremos aproximar hasta que $|x_n - \bar{x}| < 10^{-6}$.
¿Cuántas iteraciones tenemos que hacer?:

$m = \min_{0.5 \le x \le 2} |2x| = 2 \cdot 0.5 = 1, \quad M = \max_{0.5 \le x \le 2} |2| = 2,$ Por tanto, tiene que ser $\frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 = |x_n - x_{n-1}|^2 < 10^{-6} \ \rightarrow \ |x_n - x_{n-1}| < 10^{-3}$

$$x_1 = \frac{x_0^2+1}{2x_0} = \frac{2^2+1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2+1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

$$x_3 = \frac{x_2^2+1}{2x_2} = \frac{3281}{3280} = 1.0003048$$

$\vdots$ Etc.

Como puede verse, el método es mucho más rápido que el de bisección.

$|x_1 - x_0| = 0.75 \geq 0.001 \ \rightarrow$ seguimos

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método: $\quad f'(x) = 2x, \ f''(x) = 2$

c) Supongamos ahora que queremos aproximar hasta que $|x_n - \bar{x}| < 10^{-6}$. ¿Cuántas iteraciones tenemos que hacer?:

$m = \min_{0.5 \leq x \leq 2} |2x| = 2 \cdot 0.5 = 1, \quad M = \max_{0.5 \leq x \leq 2} |2| = 2,$ Por tanto, tiene que ser $\frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 = |x_n - x_{n-1}|^2 < 10^{-6} \ \rightarrow \ |x_n - x_{n-1}| < 10^{-3}$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 1}{2x_2} = \frac{3281}{3280} = 1.0003048$$

$\vdots$ Etc.

Como puede verse, el método es mucho más rápido que el de bisección.

$|x_1 - x_0| = 0.75 \geq 0.001 \ \rightarrow$ seguimos
$|x_2 - x_1| = 0.225 \geq 0.001 \ \rightarrow$ "

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método: $f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2$

c) Supongamos ahora que queremos aproximar hasta que $|x_n - \bar{x}| < 10^{-6}$.
¿Cuántas iteraciones tenemos que hacer?:

$m = \min_{0.5 \le x \le 2} |2x| = 2 \cdot 0.5 = 1, \quad M = \max_{0.5 \le x \le 2} |2| = 2,$ Por tanto, tiene que ser $\frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 = |x_n - x_{n-1}|^2 < 10^{-6} \ \rightarrow \ |x_n - x_{n-1}| < 10^{-3}$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 1}{2x_2} = \frac{3281}{3280} = 1.0003048$$

$\vdots$ Etc.

Como puede verse, el método es mucho más rápido que el de bisección.

$|x_1 - x_0| = 0.75 \geq 0.001 \ \rightarrow$ seguimos
$|x_2 - x_1| = 0.225 \geq 0.001 \ \rightarrow$ "
$|x_3 - x_2| = 0.02469 \geq 0.001 \ \rightarrow$ "

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método: $f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2$

c) Supongamos ahora que queremos aproximar hasta que $|x_n - \bar{x}| < 10^{-6}$. ¿Cuántas iteraciones tenemos que hacer?:

$m = \min_{0.5 \leq x \leq 2} |2x| = 2 \cdot 0.5 = 1, \quad M = \max_{0.5 \leq x \leq 2} |2| = 2,$ Por tanto, tiene que ser $\frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 = |x_n - x_{n-1}|^2 < 10^{-6} \ \rightarrow \ |x_n - x_{n-1}| < 10^{-3}$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 1}{2x_2} = \frac{3281}{3280} = 1.0003048$$

$\vdots$ Etc.

Como puede verse, el método es mucho más rápido que el de bisección.

$|x_1 - x_0| = 0.75 \geq 0.001 \ \rightarrow$ seguimos
$|x_2 - x_1| = 0.225 \geq 0.001 \ \rightarrow$ "
$|x_3 - x_2| = 0.02469 \geq 0.001 \ \rightarrow$ "

$$x_4 = \frac{21523361}{21523360} = 1.0000000465$$

Ejemplo: Consideramos $f(x) = x^2 - 1$ y el intervalo $[0.5, 2]$.
Aplicamos el método: $f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2$

c) Supongamos ahora que queremos aproximar hasta que $|x_n - \bar{x}| < 10^{-6}$. ¿Cuántas iteraciones tenemos que hacer?:

$m = \min_{0.5 \leq x \leq 2} |2x| = 2 \cdot 0.5 = 1, \quad M = \max_{0.5 \leq x \leq 2} |2| = 2,$ Por tanto, tiene que ser $\frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 = |x_n - x_{n-1}|^2 < 10^{-6} \ \rightarrow \ |x_n - x_{n-1}| < 10^{-3}$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} = \frac{41}{40} = 1.025$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 1}{2x_2} = \frac{3281}{3280} = 1.0003048$$

$\vdots$ Etc.

Como puede verse, el método es mucho más rápido que el de bisección.

$|x_1 - x_0| = 0.75 \geq 0.001 \ \rightarrow$ seguimos
$|x_2 - x_1| = 0.225 \geq 0.001 \ \rightarrow$ "
$|x_3 - x_2| = 0.02469 \geq 0.001 \ \rightarrow$ "

$$x_4 = \frac{21523361}{21523360} = 1.0000000465$$

$|x_4 - x_3| = 0.000304832 < 0.001 \ \rightarrow$ paramos. Por tanto, la aproximación es $\tilde{x} = x_4$. Obsérvese que, efectivamente, $|\tilde{x} - \bar{x}| = |x_4 - 1| = 4.6461110^{-8} < 10^{-6}$, como queríamos.

Ejercicio:

a) Comprobar que la función $f(x) = e^{-x} - 2x$ en el intervalo $[0.2, 0.6]$ verifica las hipótesis del método de Newton.

b) Aplicar el método para aproximar con un error menor que 10^{-5} la raíz que tiene en ese intervalo.

Solución:

Ejercicio:

a) Comprobar que la función $f(x) = e^{-x} - 2x$ en el intervalo $[0.2, 0.6]$ verifica las hipótesis del método de Newton.

b) Aplicar el método para aproximar con un error menor que 10^{-5} la raíz que tiene en ese intervalo.

Solución: $f'(x) = -e^{-x} - 2$, $f''(x) = e^{-x}$. Por tanto:

Ejercicio:

a) Comprobar que la función $f(x) = e^{-x} - 2x$ en el intervalo $[0.2, 0.6]$ verifica las hipótesis del método de Newton.

b) Aplicar el método para aproximar con un error menor que 10^{-5} la raíz que tiene en ese intervalo.

Solución: $f'(x) = -e^{-x} - 2$, $f''(x) = e^{-x}$. Por tanto:

a)

1) $f''(x)$ es continua en $[0.2, 0.6]$.

Ejercicio:
a) Comprobar que la función $f(x) = e^{-x} - 2x$ en el intervalo $[0.2, 0.6]$ verifica las hipótesis del método de Newton.
b) Aplicar el método para aproximar con un error menor que 10^{-5} la raíz que tiene en ese intervalo.
Solución: $f'(x) = -e^{-x} - 2$, $f''(x) = e^{-x}$. Por tanto:
a)
1) $f''(x)$ es continua en $[0.2, 0.6]$.
2) $f(0.2)f(0.6) = (0.418731)(-0.651188) < 0$, por lo que hay una raíz en ese intervalo.

Ejercicio:

a) Comprobar que la función $f(x) = e^{-x} - 2x$ en el intervalo $[0.2, 0.6]$ verifica las hipótesis del método de Newton.

b) Aplicar el método para aproximar con un error menor que 10^{-5} la raíz que tiene en ese intervalo.

Solución: $f'(x) = -e^{-x} - 2$, $f''(x) = e^{-x}$. Por tanto:

a)

1) $f''(x)$ es continua en $[0.2, 0.6]$.

2) $f(0.2)f(0.6) = (0.418731)(-0.651188) < 0$, por lo que hay una raíz en ese intervalo.

3) $f'(x)$ es negativa en $[0.2, 0.6]$ y $f''(x)$ es positiva en $[0.2, 0.6]$. Es decir, las dos tienen signo constante en ese intervalo.

Ejercicio:
a) Comprobar que la función $f(x) = e^{-x} - 2x$ en el intervalo $[0.2, 0.6]$ verifica las hipótesis del método de Newton.
b) Aplicar el método para aproximar con un error menor que 10^{-5} la raíz que tiene en ese intervalo.
Solución: $f'(x) = -e^{-x} - 2$, $f''(x) = e^{-x}$. Por tanto:
b)
$|f'(x)| = e^{-x} + 2$ es decreciente. Por tanto,

$$m = \min_{0.2 \leq x \leq 0.6} |f'(x)| = |f'(0.6)| = 2.54881.$$

Ejercicio:
a) Comprobar que la función $f(x) = e^{-x} - 2x$ en el intervalo $[0.2, 0.6]$ verifica las hipótesis del método de Newton.
b) Aplicar el método para aproximar con un error menor que 10^{-5} la raíz que tiene en ese intervalo.
Solución: $f'(x) = -e^{-x} - 2$, $f''(x) = e^{-x}$. Por tanto:
b)
$|f'(x)| = e^{-x} + 2$ es decreciente. Por tanto,

$$m = \min_{0.2 \leq x \leq 0.6} |f'(x)| = |f'(0.6)| = 2.54881.$$

$|f''(x)| = e^{-x}$ es decreciente. Por tanto,

$$M = \max_{0.2 \leq x \leq 0.6} |f''(x)| = |f''(0.2)| = 0.81873.$$

Por consiguiente, debemos iterar hasta que

$$\frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 = \frac{0.81873}{2 \cdot 2.54881}|x_n - x_{n-1}|^2 = 0.16061|x_n - x_{n-1}|^2 < 10^{-5}$$

Ejercicio:

a) Comprobar que la función $f(x) = e^{-x} - 2x$ en el intervalo $[0.2, 0.6]$ verifica las hipótesis del método de Newton.

b) Aplicar el método para aproximar con un error menor que 10^{-5} la raíz que tiene en ese intervalo.

Solución: $f'(x) = -e^{-x} - 2$, $f''(x) = e^{-x}$. Por tanto:

Aplicamos el método:

• Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$. En este caso tomamos $x_0 = 0.2$, pues $f(0.2) = 0.418731$ y $f''(0.2) = 0.818731$.

Debemos iterar hasta que $0.16061|x_n - x_{n-1}|^2 < 10^{-5}$

Ejercicio:

a) Comprobar que la función $f(x) = e^{-x} - 2x$ en el intervalo $[0.2, 0.6]$ verifica las hipótesis del método de Newton.

b) Aplicar el método para aproximar con un error menor que 10^{-5} la raíz que tiene en ese intervalo.

Solución: $f'(x) = -e^{-x} - 2$, $f''(x) = e^{-x}$. Por tanto:

Aplicamos el método:

- Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$. En este caso tomamos $x_0 = 0.2$, pues $f(0.2) = 0.418731$ y $f''(0.2) = 0.818731$.
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0, 1, \ldots$

Debemos iterar hasta que $0.16061|x_n - x_{n-1}|^2 < 10^{-5}$

Ejercicio:

a) Comprobar que la función $f(x) = e^{-x} - 2x$ en el intervalo $[0.2, 0.6]$ verifica las hipótesis del método de Newton.

b) Aplicar el método para aproximar con un error menor que 10^{-5} la raíz que tiene en ese intervalo.

Solución: $f'(x) = -e^{-x} - 2$, $f''(x) = e^{-x}$. Por tanto:

Aplicamos el método:

- Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\text{sign}\, f(x_0) = \text{sign}\, f''(x_0)$. En este caso tomamos $x_0 = 0.2$, pues $f(0.2) = 0.418731$ y $f''(0.2) = 0.818731$.
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \ldots$

$$x_0 = 0.2 \rightarrow \begin{cases} f(0.2) = 0.418731 \\ f'(0.2) = -2.81873 \end{cases}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.2 - \frac{0.418731}{-2.81873} = 0.348553$$

Como $0.16061|x_1 - x_0|^2 = 0.00354434 \geq 10^{-5}$, seguimos la iteración.

Debemos iterar hasta que $0.16061|x_n - x_{n-1}|^2 < 10^{-5}$

Ejercicio:

a) Comprobar que la función $f(x) = e^{-x} - 2x$ en el intervalo $[0.2, 0.6]$ verifica las hipótesis del método de Newton.

b) Aplicar el método para aproximar con un error menor que 10^{-5} la raíz que tiene en ese intervalo.

Solución: $f'(x) = -e^{-x} - 2$, $f''(x) = e^{-x}$. Por tanto:

Aplicamos el método:

- Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f''(x_0)$. En este caso tomamos $x_0 = 0.2$, pues $f(0.2) = 0.418731$ y $f''(0.2) = 0.818731$.
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \ldots$

$$x_1 = 0.348553 \rightarrow \begin{cases} f(0.348553) = 0.00860266 \\ f'(0.348553) = -2.70571 \end{cases}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.348553 - \frac{0.00860266}{-2.70571} = 0.351732$$

Como $0.16061|x_2 - x_1|^2 = 1.62313 \times 10^{-6} < 10^{-5}$, paramos la iteración y tomamos la aproximación $\tilde{x} = x_2 = 0.351732$.

Debemos iterar hasta que $0.16061|x_n - x_{n-1}|^2 < 10^{-5}$

Ejercicio:

a) Comprobar que la función $f(x) = e^{-x} - 2x$ en el intervalo $[0.2, 0.6]$ verifica las hipótesis del método de Newton.

b) Aplicar el método para aproximar con un error menor que 10^{-5} la raíz que tiene en ese intervalo.

Solución: $f'(x) = -e^{-x} - 2$, $f''(x) = e^{-x}$. Por tanto:

Aplicamos el método:

- Partimos de un $x_0 \in [a, b]$, que verifique $\text{sign}\, f(x_0) = \text{sign}\, f''(x_0)$. En este caso tomamos $x_0 = 0.2$, pues $f(0.2) = 0.418731$ y $f''(0.2) = 0.818731$.
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \ldots$

$$x_1 = 0.348553 \to \begin{cases} f(0.348553) = 0.00860266 \\ f'(0.348553) = -2.70571 \end{cases}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.348553 - \frac{0.00860266}{-2.70571} = 0.351732$$

Como $0.16061|x_2 - x_1|^2 = 1.62313 \times 10^{-6} < 10^{-5}$, paramos la iteración y tomamos la aproximación $\tilde{x} = x_2 = 0.351732$.

Obsérvese lo buena que es esta aproximación: $f(x_2) = 3.56319 \times 10^{-6}$.