Cálculo Numérico y Estadística

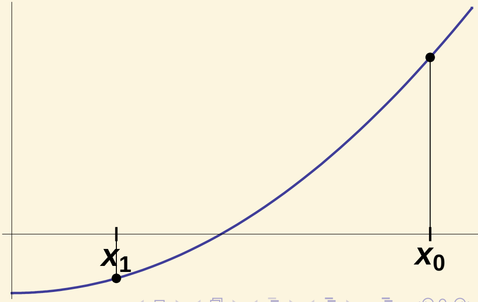
Primera parte: Cálculo Numérico

José Luis Bravo

Curso 2019/2020
Segundo semestre

Método de la secante:

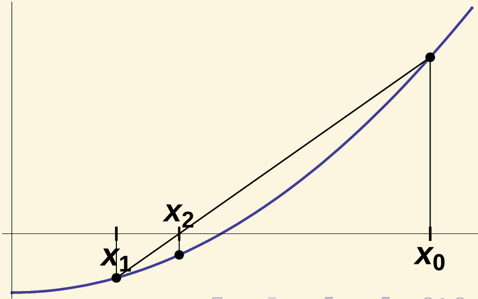
Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$$



Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$$

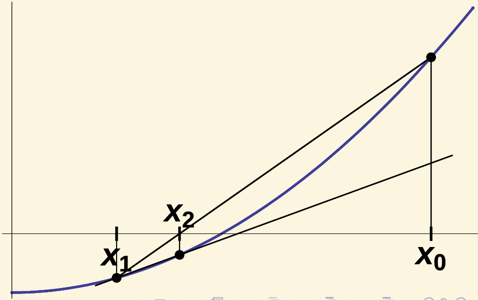
El punto x_{n+1} es la intersección de la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.



Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$$

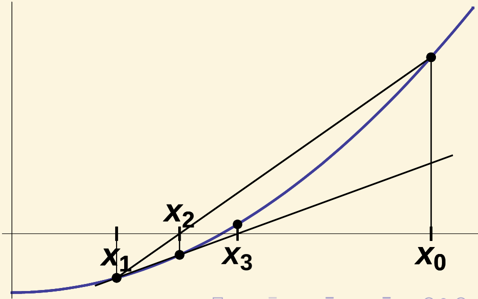
El punto x_{n+1} es la intersección de la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.



Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $\quad x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$

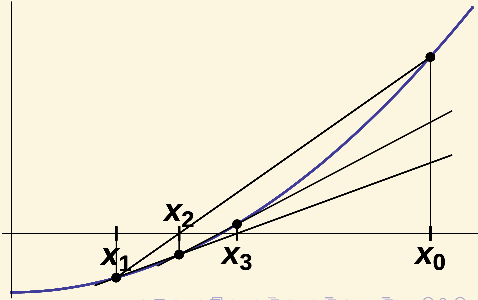
El punto x_{n+1} es la intersección de la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.



Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.

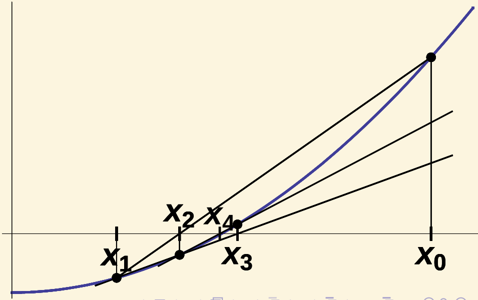


Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.

Pararemos la iteración cuando consideremos que $|f(x_n)|$ es suficientemente pequeño, o cuando $|x_{n+1} - x_n| \approx 0$, pues eso significa que $f(x_n) \approx 0$.



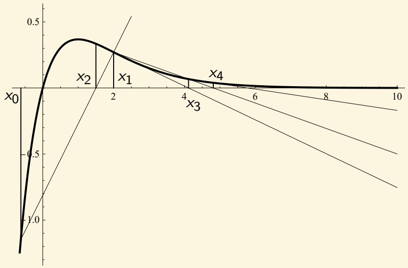
Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.

Pararemos la iteración cuando consideremos que $|f(x_n)|$ es suficientemente pequeño, o cuando $|x_{n+1} - x_n| \approx 0$, pues eso significa que $f(x_n) \approx 0$.

Este método puede no converger,



Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$$

El punto x_{n+1} es la intersección de la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.

Pararemos la iteración cuando consideremos que $|f(x_n)|$ es suficientemente pequeño, o cuando $|x_{n+1} - x_n| \approx 0$, pues eso significa que $f(x_n) \approx 0$.

Este método puede no converger, pero cuando lo hace puede ser más efectivo que el de Newton: dos iteraciones del método de la secante (para las que hay que evaluar $f(x)$ en dos puntos) dan mejor aproximación que una iteración del método de Newton (en la que hay que evaluar $f(x)$ y $f'(x)$ en un punto).

Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$

Ejemplo: Considerar $f(x) = x^2 - 1$ en $[0.5, 2]$. Partimos de $x_0 = 2$ y $x_1 = 0.5$ pues $|f(x_1)| = 0.75 < |f(x_0)| = 3$. Calculamos

$x_2 =$

Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$

Ejemplo: Considerar $f(x) = x^2 - 1$ en $[0.5, 2]$. Partimos de $x_0 = 2$ y $x_1 = 0.5$ pues $|f(x_1)| = 0.75 < |f(x_0)| = 3$. Calculamos

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\right) = 0.5 - (-0.75)\left(\frac{0.5-2}{-0.75-3}\right) = \frac{4}{5} = 0.8$$

Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$

Ejemplo: Considerar $f(x) = x^2 - 1$ en $[0.5, 2]$. Partimos de $x_0 = 2$ y $x_1 = 0.5$ pues $|f(x_1)| = 0.75 < |f(x_0)| = 3$. Calculamos

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\right) = 0.5 - (-0.75)\left(\frac{0.5-2}{-0.75-3}\right) = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$x_3 =$$

Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$$

Ejemplo: Considerar $f(x) = x^2 - 1$ en $[0.5, 2]$. Partimos de $x_0 = 2$ y $x_1 = 0.5$ pues $|f(x_1)| = 0.75 < |f(x_0)| = 3$. Calculamos

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}\right) = 0.5 - (-0.75)\left(\frac{0.5-2}{-0.75-3}\right) = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$x_3 = \frac{14}{13} = 1.07692$$

Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$

Ejemplo: Considerar $f(x) = x^2 - 1$ en $[0.5, 2]$. Partimos de $x_0 = 2$ y $x_1 = 0.5$ pues $|f(x_1)| = 0.75 < |f(x_0)| = 3$. Calculamos

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\tfrac{x_1 - x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\right) = 0.5 - (-0.75)\left(\tfrac{0.5-2}{-0.75-3}\right) = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$x_3 = \tfrac{14}{13} = 1.07692$$

$$x_4 =$$

Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$

Ejemplo: Considerar $f(x) = x^2 - 1$ en $[0.5, 2]$. Partimos de $x_0 = 2$ y $x_1 = 0.5$ pues $|f(x_1)| = 0.75 < |f(x_0)| = 3$. Calculamos

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\right) = 0.5 - (-0.75)\left(\frac{0.5-2}{-0.75-3}\right) = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$x_3 = \frac{14}{13} = 1.07692$$

$$x_4 = \frac{121}{122} = 0.991803$$

Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$

Ejemplo: Considerar $f(x) = x^2 - 1$ en $[0.5, 2]$. Partimos de $x_0 = 2$ y $x_1 = 0.5$ pues $|f(x_1)| = 0.75 < |f(x_0)| = 3$. Calculamos

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\right) = 0.5 - (-0.75)\left(\frac{0.5-2}{-0.75-3}\right) = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$x_3 = \frac{14}{13} = 1.07692$$

$$x_4 = \frac{121}{122} = 0.991803$$

$$x_5 =$$

Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $\quad x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$

Ejemplo: Considerar $f(x) = x^2 - 1$ en $[0.5, 2]$. Partimos de $x_0 = 2$ y $x_1 = 0.5$ pues $|f(x_1)| = 0.75 < |f(x_0)| = 3$. Calculamos

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\right) = 0.5 - (-0.75)\left(\frac{0.5-2}{-0.75-3}\right) = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$x_3 = \frac{14}{13} = 1.07692$$

$$x_4 = \frac{121}{122} = 0.991803$$

$$x_5 = \frac{3280}{3281} = 0.999695$$

Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $\quad x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$

Ejemplo: Considerar $f(x) = x^2 - 1$ en $[0.5, 2]$. Partimos de $x_0 = 2$ y $x_1 = 0.5$ pues $|f(x_1)| = 0.75 < |f(x_0)| = 3$. Calculamos

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}\right) = 0.5 - (-0.75)\left(\frac{0.5-2}{-0.75-3}\right) = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$x_3 = \frac{14}{13} = 1.07692$$

$$x_4 = \frac{121}{122} = 0.991803$$

$$x_5 = \frac{3280}{3281} = 0.999695$$

$$x_6 = \frac{797162}{797161} = 1.0000012$$

Método de la secante:

Como hemos visto, el método de Newton es un método que (en las condiciones apropiadas) tiene una buena velocidad de convergencia (cuadrática). Sin embargo, su utilización puede ser complicada debido a la necesidad de calcular en cada iteración $f'(x_n)$. Para paliar este inconveniente, surge el método de la secante en el que en lugar de considerar $f'(x_n)$ se aproxima este valor con $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, con lo que, partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1 se genera la sucesión $$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$$

Ejemplo: Considerar $f(x) = x^2 - 1$ en $[0.5, 2]$. Partimos de $x_0 = 2$ y $x_1 = 0.5$ pues $|f(x_1)| = 0.75 < |f(x_0)| = 3$. Calculamos

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1 - x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\right) = 0.5 - (-0.75)\left(\frac{0.5-2}{-0.75-3}\right) = \frac{4}{5} = 0.8$$

$x_3 = \frac{14}{13} = 1.07692$

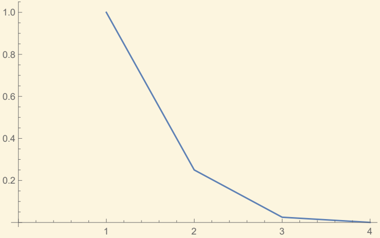
$x_4 = \frac{121}{122} = 0.991803$

$x_5 = \frac{3280}{3281} = 0.999695$

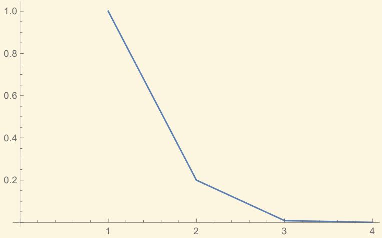
$x_6 = \frac{797162}{797161} = 1.0000012$

Obsérvese que 3 iteraciones del método de Newton nos dio la aproximación 1.0003048, mientras que 6 iteraciones del de la secante nos ha dado el valor 1.0000012.

Error con 3 iteraciones del método de Newton:



Error (cada dos pasos) con 6 iteraciones del método de la secante:



<u>Ejemplo</u>: Considerar $f(x) = x^2 - 1$ en $[0.5, 2]$. Partimos de $x_0 = 2$ y $x_1 = 0.5$ pues $|f(x_1)| = 0.75 < |f(x_0)| = 3$. Calculamos

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}\right) = 0.5 - (-0.75)\left(\frac{0.5-2}{-0.75-3}\right) = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$x_3 = \frac{14}{13} = 1.07692$$

$$x_4 = \frac{121}{122} = 0.991803$$

$$x_5 = \frac{3280}{3281} = 0.999695$$

$$x_6 = \frac{797162}{797161} = 1.0000012$$

Obsérvese que 3 iteraciones del método de Newton nos dio la aproximación 1.0003048, mientras que 6 iteraciones del de la secante nos ha dado el valor 1.0000012.

Ejercicio 1: Considerar la función $f(x) = e^{-x} - 2x$ en el intervalo $[0.2, 0.6]$. Comprobar que al aplicar el método de la secante se obtienen (redondeando a 6 decimales) los siguientes resultados:

n	x_n	$f(x_n)$
0	0.6	-0.651188
1	0.2	0.418731
2	0.356547	-0.013004
3	0.351832	-0.000266
4	0.351734	-0.000001
5	0.351734	

Con la precisión que hemos trabajado, ha resultado que $x_4 = x_5$, por lo que utilizamos ese valor como aproximación.

Ejercicio 2: Considerar la función $f(x) = \cos x - x$ en el intervalo $[0, 1]$. Comprobar que al aplicar el método de la secante se obtienen (redondeando a 6 decimales) los siguientes resultados:

n	x_n	$f(x_n)$
0	0.	1.
1	1.	-0.459698
2	0.685073	0.0893
3	0.736299	0.00466
4	0.739119	-0.000057
5	0.739085	0

Como $f(x_5) = 0$, tomamos x_5 como aproximación. Recuérdese que estamos ajustando las cuentas a 6 decimales, con lo que x_5 no es necesariamente la raíz, sino una aproximación.