Cálculo Numérico y Estadística

Primera parte: Cálculo Numérico

José Luis Bravo

Curso 2019/2020
Segundo semestre

En este tema trataremos el siguiente problema: dados unos datos

x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

en donde $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, queremos encontrar un polinomio (de interpolación) $P(x)$, del grado más pequeño posible, que verifique

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ P(x_2) = y_2,\ \ldots, P(x_n) = y_n.$$

En este tema trataremos el siguiente problema: dados unos datos

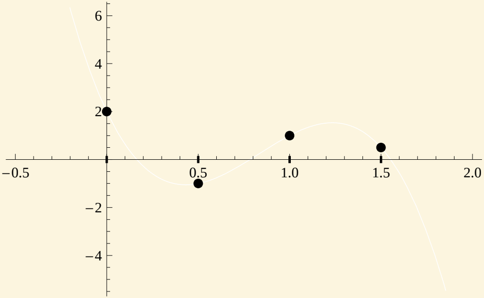
x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

en donde $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, queremos encontrar un polinomio (de interpolación) $P(x)$, del grado más pequeño posible, que verifique

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ P(x_2) = y_2,\ \ldots, P(x_n) = y_n.$$

Por ejemplo, dados los datos,

x	0	0.5	1	1.5
y	2	-1	1	0.5



Tema I.3: Interpolación.

En este tema trataremos el siguiente problema: dados unos datos

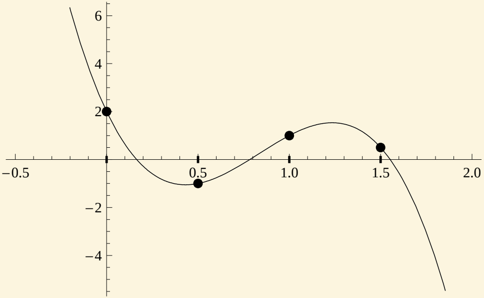
x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

en donde $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, queremos encontrar un polinomio (de interpolación) $P(x)$, del grado más pequeño posible, que verifique

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ P(x_2) = y_2,\ \ldots, P(x_n) = y_n.$$

Por ejemplo, dados los datos,

x	0	0.5	1	1.5
y	2	-1	1	0.5



veremos como calcular el polinomio

$$P(x) = -10x^3 + 25x^2 - 16x + 2$$

que, efectivamente, verifica

$$P(0) = 2,\ P(0.5) = -1,$$

$$P(1) = 1,\ P(1.5) = 0.5.$$

La clave de lo que veremos está en el siguiente teorema:

Teorema. Dados $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$ de la recta real, y $n+1$ valores arbitrarios, $y_0, y_1, \dots, y_n$, existe un y solo un polinomio de grado $\leq n$, $\quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad$ tal que

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ \dots,\ P(x_n) = y_n.$$

La clave de lo que veremos está en el siguiente teorema:

Teorema. Dados $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de la recta real, y $n+1$ valores arbitrarios, $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe un y solo un polinomio de grado $\leq n$, $\quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad$ tal que

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ \ldots,\ P(x_n) = y_n.$$

Demostración: Ese polinomio $P(x)$ existirá y será único si y solo si existe y es única la solución del sistema de $n+1$ ecuaciones lineales con las $n+1$ incógnitas $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$,

$$\begin{aligned}
P(x_0) &= a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\
P(x_1) &= a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P(x_n) &= a_n x_n^n + a_{n-1}x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 = y_n
\end{aligned}$$

La clave de lo que veremos está en el siguiente teorema:

Teorema. Dados $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de la recta real, y $n+1$ valores arbitrarios, $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe un y solo un polinomio de grado $\leq n$, $\quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad$ tal que

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ \ldots,\ P(x_n) = y_n.$$

Demostración: Ese polinomio $P(x)$ existirá y será único si y solo si existe y es única la solución del sistema de $n+1$ ecuaciones lineales con las $n+1$ incógnitas $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$,

$$\begin{aligned}
P(x_0) &= a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = y_0\\
P(x_1) &= a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = y_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P(x_n) &= a_n x_n^n + a_{n-1}x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 = y_n
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1\\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n\\ \vdots\\ a_1\\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_n \end{pmatrix}$$

La clave de lo que veremos está en el siguiente teorema:

Teorema. Dados $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de la recta real, y $n+1$ valores arbitrarios, $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe un y solo un polinomio de grado $\leq n$, $\quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad$ tal que

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ \ldots,\ P(x_n) = y_n.$$

Demostración: Ese polinomio $P(x)$ existirá y será único si y solo si existe y es única la solución del sistema de $n+1$ ecuaciones lineales con las $n+1$ incógnitas $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$,

$$\begin{aligned} P(x_0) &= a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ P(x_1) &= a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P(x_n) &= a_n x_n^n + a_{n-1}x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Pero como $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, se tiene que el determinante (de Vandermonde) de la matriz del sistema es no nulo, con lo que el sistema tiene solución única.

La clave de lo que veremos está en el siguiente teorema:

Teorema. Dados $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$ de la recta real, y $n+1$ valores arbitrarios, $y_0, y_1, \dots, y_n$, existe un y solo un polinomio de grado $\leq n$, $\quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad$ tal que

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ \dots,\ P(x_n) = y_n.$$

Demostración: Ese polinomio $P(x)$ existirá y será único si y solo si existe y es única la solución del sistema de $n+1$ ecuaciones lineales con las $n+1$ incógnitas $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$,

$$\begin{aligned} P(x_0) &= a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ P(x_1) &= a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P(x_n) &= a_n x_n^n + a_{n-1}x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Pero como $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, se tiene que el determinante (de Vandermonde) de la matriz del sistema es no nulo, con lo que el sistema tiene solución única.

Su solución nos da el polinomio $P(x)$ buscado. ■

La clave de lo que veremos está en el siguiente teorema:

Teorema. Dados $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$ de la recta real, y $n+1$ valores arbitrarios, $y_0, y_1, \dots, y_n$, existe un y solo un polinomio de grado $\leq n$, $\quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad$ tal que

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ \dots,\ P(x_n) = y_n.$$

Ejemplo: Queremos calcular el polinomio $P(x)$, de menor grado, que verifica $P(0) = 2$, $P(0.5) = -1$, $P(1) = 1$ y $P(1.5) = 0.5$. Por el Teorema sabemos que hay uno de grado ≤ 3, es decir, de la forma $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 han de verificar las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
P(0) &= a_3(0)^3 + a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 = 2\\
P(0.5) &= a_3(0.5)^3 + a_2(0.5)^2 + a_1(0.5) + a_0 = -1\\
P(1) &= a_3(1)^3 + a_2(1)^2 + a_1(1) + a_0 = 1\\
P(1.5) &= a_3(1.5)^3 + a_2(1.5)^2 + a_1(1.5) + a_0 = 0.5
\end{aligned}$$

La clave de lo que veremos está en el siguiente teorema:

Teorema. Dados $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de la recta real, y $n+1$ valores arbitrarios, $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe un y solo un polinomio de grado $\leq n$, $\quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad$ tal que

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ \ldots,\ P(x_n) = y_n.$$

Ejemplo: Queremos calcular el polinomio $P(x)$, de menor grado, que verifica $P(0) = 2$, $P(0.5) = -1$, $P(1) = 1$ y $P(1.5) = 0.5$. Por el Teorema sabemos que hay uno de grado ≤ 3, es decir, de la forma $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 han de verificar las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
P(0) &= a_3(0)^3 + a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 = 2\\
P(0.5) &= a_3(0.5)^3 + a_2(0.5)^2 + a_1(0.5) + a_0 = -1\\
P(1) &= a_3(1)^3 + a_2(1)^2 + a_1(1) + a_0 = 1\\
P(1.5) &= a_3(1.5)^3 + a_2(1.5)^2 + a_1(1.5) + a_0 = 0.5
\end{aligned}$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= 2\\
0.125a_3 + 0.25a_2 + 0.5a_1 + a_0 &= -1\\
a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 1\\
3.375a_3 + 2.25a_2 + 1.5a_1 + a_0 &= 0.5
\end{aligned}\right\}$$

La clave de lo que veremos está en el siguiente teorema:

Teorema. Dados $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de la recta real, y $n+1$ valores arbitrarios, $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe un y solo un polinomio de grado $\leq n$, $\quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad$ tal que

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ \ldots,\ P(x_n) = y_n.$$

Ejemplo: Queremos calcular el polinomio $P(x)$, de menor grado, que verifica $P(0) = 2$, $P(0.5) = -1$, $P(1) = 1$ y $P(1.5) = 0.5$. Por el Teorema sabemos que hay uno de grado ≤ 3, es decir, de la forma $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 han de verificar las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
P(0) &= a_3(0)^3 + a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 = 2\\
P(0.5) &= a_3(0.5)^3 + a_2(0.5)^2 + a_1(0.5) + a_0 = -1\\
P(1) &= a_3(1)^3 + a_2(1)^2 + a_1(1) + a_0 = 1\\
P(1.5) &= a_3(1.5)^3 + a_2(1.5)^2 + a_1(1.5) + a_0 = 0.5
\end{aligned}$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= 2\\
0.125a_3 + 0.25a_2 + 0.5a_1 + a_0 &= -1\\
a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 1\\
3.375a_3 + 2.25a_2 + 1.5a_1 + a_0 &= 0.5
\end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}
a_0 = 2,\ a_1 = -16,\ a_2 = 25,\ a_3 = -10\\
\text{lo que da el polinomio}\\
P(x) = -10x^3 + 25x^2 - 16x + 2
\end{array}\right.$$

Cálculo del polinomio de interpolación:

Por el teorema que hemos visto, sabemos que dados los datos (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, existe un único polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$, y que este polinomio podemos calcularlo resolviendo un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas.

Cálculo del polinomio de interpolación:

Por el teorema que hemos visto, sabemos que dados los datos (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, existe un único polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$, y que este polinomio podemos calcularlo resolviendo un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas. Lo que haremos a partir de ahora es ver otras formas de calcular $P(x)$, de forma más efectiva. El polinomio calculado siempre será el mismo (pues es único, y solo depende de los datos considerados), pero lo escribiremos de diferentes formas.

Cálculo del polinomio de interpolación:

Por el teorema que hemos visto, sabemos que dados los datos (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, existe un único polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$, y que este polinomio podemos calcularlo resolviendo un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas. Lo que haremos a partir de ahora es ver otras formas de calcular $P(x)$, de forma más efectiva. El polinomio calculado siempre será el mismo (pues es único, y solo depende de los datos considerados), pero lo escribiremos de diferentes formas. Por ejemplo, los polinomios

$$P(x) = -10x^3 + 25x^2 - 16x + 2$$

y

$$Q(x) = 2 - 6x + 10x(x - \tfrac{1}{2}) - 10x(x - \tfrac{1}{2})(x - 1)$$

son el mismo.

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$.

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

en donde $\widehat{\ }$ significa que ese término no está en la expresión.

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

en donde $\widehat{\quad}$ significa que ese término no está en la expresión. Por ejemplo, para los cuatro puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, se tiene

$L_0(x) =$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

en donde $\widehat{\quad}$ significa que ese término no está en la expresión. Por ejemplo, para los cuatro puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, se tiene

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} =$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

en donde $\widehat{\quad}$ significa que ese término no está en la expresión. Por ejemplo, para los cuatro puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, se tiene

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(0-\frac{1}{2})(0-1)(0-\frac{3}{2})} = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1$$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

en donde $\widehat{\quad}$ significa que ese término no está en la expresión. Por ejemplo, para los cuatro puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, se tiene

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(0-\frac{1}{2})(0-1)(0-\frac{3}{2})} = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1$

$L_1(x) =$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

en donde $\widehat{\quad}$ significa que ese término no está en la expresión. Por ejemplo, para los cuatro puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, se tiene

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(0-\frac{1}{2})(0-1)(0-\frac{3}{2})} = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} =$$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

en donde $\widehat{\quad}$ significa que ese término no está en la expresión. Por ejemplo, para los cuatro puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, se tiene

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(0-\frac{1}{2})(0-1)(0-\frac{3}{2})} = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-\frac{3}{2})} = 4x^3 - 10x^2 + 6x$$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

en donde $\widehat{\quad}$ significa que ese término no está en la expresión. Por ejemplo, para los cuatro puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, se tiene

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(0-\frac{1}{2})(0-1)(0-\frac{3}{2})} = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-\frac{3}{2})} = 4x^3 - 10x^2 + 6x$$

$$L_2(x) =$$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

en donde $\widehat{\quad}$ significa que ese término no está en la expresión. Por ejemplo, para los cuatro puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, se tiene

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(0-\frac{1}{2})(0-1)(0-\frac{3}{2})} = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-\frac{3}{2})} = 4x^3 - 10x^2 + 6x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} =$$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

en donde $\widehat{\quad}$ significa que ese término no está en la expresión. Por ejemplo, para los cuatro puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, se tiene

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(0-\frac{1}{2})(0-1)(0-\frac{3}{2})} = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-\frac{3}{2})} = 4x^3 - 10x^2 + 6x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})}{(1-0)(1-\frac{1}{2})(1-\frac{3}{2})} = -4x^3 + 8x^2 - 3x$$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

en donde $\widehat{\quad}$ significa que ese término no está en la expresión. Por ejemplo, para los cuatro puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, se tiene

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(0-\frac{1}{2})(0-1)(0-\frac{3}{2})} = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-\frac{3}{2})} = 4x^3 - 10x^2 + 6x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})}{(1-0)(1-\frac{1}{2})(1-\frac{3}{2})} = -4x^3 + 8x^2 - 3x$$

$$L_3(x) =$$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

en donde $\widehat{\quad}$ significa que ese término no está en la expresión. Por ejemplo, para los cuatro puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, se tiene

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(0-\frac{1}{2})(0-1)(0-\frac{3}{2})} = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-\frac{3}{2})} = 4x^3 - 10x^2 + 6x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})}{(1-0)(1-\frac{1}{2})(1-\frac{3}{2})} = -4x^3 + 8x^2 - 3x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} =$$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

en donde $\widehat{\quad}$ significa que ese término no está en la expresión. Por ejemplo, para los cuatro puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, se tiene

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(0-\frac{1}{2})(0-1)(0-\frac{3}{2})} = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-\frac{3}{2})} = 4x^3 - 10x^2 + 6x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})}{(1-0)(1-\frac{1}{2})(1-\frac{3}{2})} = -4x^3 + 8x^2 - 3x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(\frac{3}{2}-0)(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-1)} = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x$$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

Los polinomios de Lagrange correspondientes a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son polinomios de grado n que tienen la siguiente propiedad:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

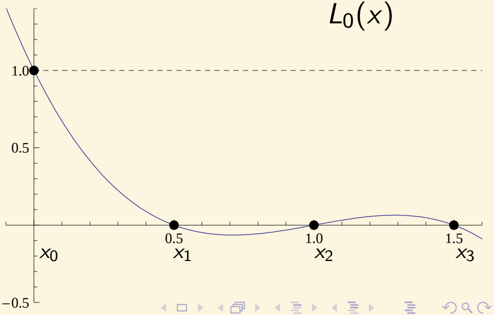
Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x-x_0)}{(x_i-x_0)} \frac{(x-x_1)}{(x_i-x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x-x_i)}}{(x_i-x_i)} \cdots \frac{(x-x_n)}{(x_i-x_n)}$$

Los polinomios de Lagrange correspondientes a $x_0, x_1, \dots, x_n$ son polinomios de grado n que tienen la siguiente propiedad:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

En nuestro ejemplo:



Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

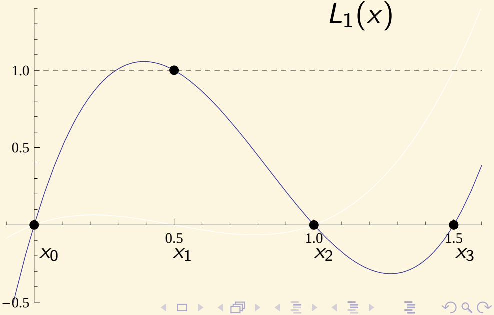
Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

Los polinomios de Lagrange correspondientes a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son polinomios de grado n que tienen la siguiente propiedad:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

En nuestro ejemplo:



Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

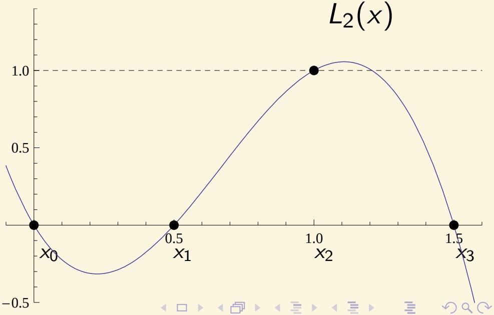
Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

Los polinomios de Lagrange correspondientes a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son polinomios de grado n que tienen la siguiente propiedad:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

En nuestro ejemplo:



Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

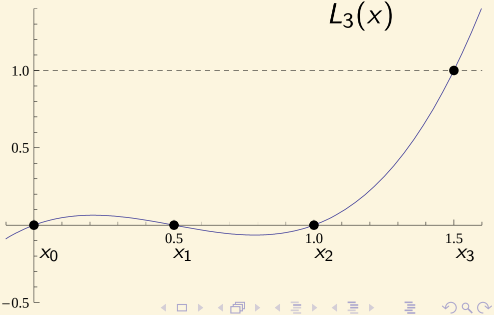
Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\ldots$, (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, $\ldots$, $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

Los polinomios de Lagrange correspondientes a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son polinomios de grado n que tienen la siguiente propiedad:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

En nuestro ejemplo:



Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

Los polinomios de Lagrange correspondientes a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son polinomios de grado n que tienen la siguiente propiedad:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Por tanto, el polinomio

$Q(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

Los polinomios de Lagrange correspondientes a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son polinomios de grado n que tienen la siguiente propiedad:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Por tanto, el polinomio $Q(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$ que verifica $Q(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

Los polinomios de Lagrange correspondientes a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son polinomios de grado n que tienen la siguiente propiedad:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Por tanto, el polinomio
$Q(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$
es un polinomio de grado $\leq n$ que verifica $Q(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Es decir, verifica las condiciones de $P(x)$, y como $P(x)$ es único, tiene que ser $P(x) \equiv Q(x)$. Por tanto,

Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange:

Dados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_i \neq x_i$ si $i \neq j$, queremos calcular el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifica $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, ..., $P(x_n) = y_n$. Para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, consideremos los polinomios (de Lagrange):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{\widehat{(x - x_i)}}{(x_i - x_i)} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

Los polinomios de Lagrange correspondientes a $x_0, x_1, \dots, x_n$ son polinomios de grado n que tienen la siguiente propiedad:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Por tanto, el polinomio $Q(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$ que verifica $Q(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Es decir, verifica las condiciones de $P(x)$, y como $P(x)$ es único, tiene que ser $P(x) \equiv Q(x)$. Por tanto,

$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$ es el polinomio de grado $\leq n$ que interpola los datos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$. (escrito en la "forma de Lagrange")

Ejemplo: Dados los datos

n	0	1	2	3
x_n	0	0.5	1	1.5
y_n	2	-1	1	0.5

ya sabemos que los polinomios de Lagrange correspondientes a esos puntos $x_0, \ldots, x_3$ son

$$L_0(x) = -\tfrac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \tfrac{11}{3}x + 1, \qquad L_1(x) = 4x^3 - 10x^2 + 6x,$$
$$L_2(x) = -4x^3 + 8x^2 - 3x, \qquad L_3(x) = \tfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \tfrac{2}{3}x.$$

Por tanto, el polinomio $P(x)$ de grado ≤ 3 que interpola en los datos de la tabla es

$$\begin{aligned}
P(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) \\
&= 2\big(-\tfrac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \tfrac{11}{3}x + 1\big) - 1\big(4x^3 - 10x^2 + 6x\big) \\
&\quad 1\big(-4x^3 + 8x^2 - 3x\big) + (0.5)\big(\tfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \tfrac{2}{3}x\big) \\
&= -10x^3 + 25x^2 - 16x + 2
\end{aligned}$$

Ejemplo: Dados los datos

n	0	1	2	3
x_n	0	0.5	1	1.5
y_n	2	-1	1	0.5

ya sabemos que los polinomios de Lagrange correspondientes a esos puntos $x_0, \ldots, x_3$ son

$$L_0(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1, \qquad L_1(x) = 4x^3 - 10x^2 + 6x,$$
$$L_2(x) = -4x^3 + 8x^2 - 3x, \qquad L_3(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x.$$

Este método tiene una importante virtud: si ahora nos pidiesen calcular el polinomio $Q(x)$ de grado ≤ 3 que interpola a la tabla

n	0	1	2	3
x_n	0	0.5	1	1.5
y_n	0	-0.25	0	0.75

resulta que los polinomios de Lagrange correspondientes a esos x_n ya los conocemos, por lo que

$Q(x) =$

Ejemplo: Dados los datos

n	0	1	2	3
x_n	0	0.5	1	1.5
y_n	2	-1	1	0.5

ya sabemos que los polinomios de Lagrange correspondientes a esos puntos $x_0, \ldots, x_3$ son

$$L_0(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1, \qquad L_1(x) = 4x^3 - 10x^2 + 6x,$$
$$L_2(x) = -4x^3 + 8x^2 - 3x, \qquad L_3(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x.$$

Este método tiene una importante virtud: si ahora nos pidiesen calcular el polinomio $Q(x)$ de grado ≤ 3 que interpola a la tabla

n	0	1	2	3
x_n	0	0.5	1	1.5
y_n	0	-0.25	0	0.75

resulta que los polinomios de Lagrange correspondientes a esos x_n ya los conocemos, por lo que

$$Q(x) = (0)L_0(x) + (-0.25)L_1(x) + (0)L_2(x) + (0.75)L_3(x) =$$

Ejemplo: Dados los datos

n	0	1	2	3
x_n	0	0.5	1	1.5
y_n	2	-1	1	0.5

ya sabemos que los polinomios de Lagrange correspondientes a esos puntos $x_0, \ldots, x_3$ son

$$L_0(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1, \qquad L_1(x) = 4x^3 - 10x^2 + 6x,$$

$$L_2(x) = -4x^3 + 8x^2 - 3x, \qquad L_3(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x.$$

Este método tiene una importante virtud: si ahora nos pidiesen calcular el polinomio $Q(x)$ de grado ≤ 3 que interpola a la tabla

n	0	1	2	3
x_n	0	0.5	1	1.5
y_n	0	-0.25	0	0.75

resulta que los polinomios de Lagrange correspondientes a esos x_n ya los conocemos, por lo que

$$Q(x) = (0)L_0(x) + (-0.25)L_1(x) + (0)L_2(x) + (0.75)L_3(x) = x^2 - x.$$

Ejemplo: Dados los datos

n	0	1	2	3
x_n	0	0.5	1	1.5
y_n	2	-1	1	0.5

ya sabemos que los polinomios de Lagrange correspondientes a esos puntos $x_0, \dots, x_3$ son

$$L_0(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1, \qquad L_1(x) = 4x^3 - 10x^2 + 6x,$$

$$L_2(x) = -4x^3 + 8x^2 - 3x, \qquad L_3(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x.$$

Pero también tiene una importante pega: si ahora nos pidiesen calcular el polinomio $H(x)$ de grado ≤ 4 que interpola a la tabla

n	0	1	2	3	4
x_n	0	0.5	1	1.5	3
y_n	0	-0.25	0	0.75	-1

Ejemplo: Dados los datos

n	0	1	2	3
x_n	0	0.5	1	1.5
y_n	2	-1	1	0.5

ya sabemos que los polinomios de Lagrange correspondientes a esos puntos $x_0, \ldots, x_3$ son

$$L_0(x) = -\tfrac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \tfrac{11}{3}x + 1, \qquad L_1(x) = 4x^3 - 10x^2 + 6x,$$
$$L_2(x) = -4x^3 + 8x^2 - 3x, \qquad L_3(x) = \tfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \tfrac{2}{3}x.$$

Pero también tiene una importante pega: si ahora nos pidiesen calcular el polinomio $H(x)$ de grado ≤ 4 que interpola a la tabla

n	0	1	2	3	4
x_n	0	0.5	1	1.5	3
y_n	0	-0.25	0	0.75	-1

tendríamos que calcular los nuevos polinomios de Lagrange $\overline{L}_0(x)$, $\overline{L}_1(x)$, $\overline{L}_2(x)$, $\overline{L}_3(x)$, $\overline{L}_4(x)$. Ninguno de los anteriores nos sirve: recuérdese que eran de grado 3 y ahora (además de haber uno más) son de grado 4.

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} =$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} =$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} =$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{8}{\pi^2}x^2 - \frac{3}{\pi}x$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{8}{\pi^2}x^2 - \frac{3}{\pi}x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} =$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{8}{\pi^2}x^2 - \frac{3}{\pi}x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(\frac{3\pi}{2}-\pi)} = \frac{4}{3\pi^3}x^3 - \frac{2}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{3\pi}x$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{8}{\pi^2}x^2 - \frac{3}{\pi}x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(\frac{3\pi}{2}-\pi)} = \frac{4}{3\pi^3}x^3 - \frac{2}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{3\pi}x$$

Por tanto, $F(x) =$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{8}{\pi^2}x^2 - \frac{3}{\pi}x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(\frac{3\pi}{2}-\pi)} = \frac{4}{3\pi^3}x^3 - \frac{2}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{3\pi}x$$

Por tanto, $F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) =$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{8}{\pi^2}x^2 - \frac{3}{\pi}x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(\frac{3\pi}{2}-\pi)} = \frac{4}{3\pi^3}x^3 - \frac{2}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{3\pi}x$$

Por tanto, $F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) =$
$(\operatorname{sen} 0)L_0(x) + (\operatorname{sen} \frac{\pi}{2})L_1(x) + (\operatorname{sen} \pi)L_2(x) + (\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2})L_3(x) =$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{8}{\pi^2}x^2 - \frac{3}{\pi}x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(\frac{3\pi}{2}-\pi)} = \frac{4}{3\pi^3}x^3 - \frac{2}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{3\pi}x$$

Por tanto, $F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) =$

$$(\operatorname{sen} 0)L_0(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\operatorname{sen} \pi)L_2(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$

$$(0)L_0(x)+(1)L_1(x)+(0)L_2(x)+(-1)L_3(x) =$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{8}{\pi^2}x^2 - \frac{3}{\pi}x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(\frac{3\pi}{2}-\pi)} = \frac{4}{3\pi^3}x^3 - \frac{2}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{3\pi}x$$

Por tanto, $F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) =$

$$(\operatorname{sen} 0)L_0(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\operatorname{sen} \pi)L_2(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$

$$(0)L_0(x)+(1)L_1(x)+(0)L_2(x)+(-1)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3-\frac{8}{\pi^2}x^2+\frac{16}{3\pi}x$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{8}{\pi^2}x^2 - \frac{3}{\pi}x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(\frac{3\pi}{2}-\pi)} = \frac{4}{3\pi^3}x^3 - \frac{2}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{3\pi}x$$

Por tanto, $F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) =$

$$(\operatorname{sen} 0)L_0(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\operatorname{sen} \pi)L_2(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$

$$(0)L_0(x)+(1)L_1(x)+(0)L_2(x)+(-1)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3-\frac{8}{\pi^2}x^2+\frac{16}{3\pi}x$$

$G(x) =$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{8}{\pi^2}x^2 - \frac{3}{\pi}x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(\frac{3\pi}{2}-\pi)} = \frac{4}{3\pi^3}x^3 - \frac{2}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{3\pi}x$$

Por tanto, $F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) =$

$$(\operatorname{sen} 0)L_0(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\operatorname{sen} \pi)L_2(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$

$$(0)L_0(x)+(1)L_1(x)+(0)L_2(x)+(-1)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3-\frac{8}{\pi^2}x^2+\frac{16}{3\pi}x$$

$G(x) = g(x_0)L_0(x) + g(x_1)L_1(x) + g(x_2)L_2(x) + g(x_3)L_3(x) =$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{8}{\pi^2}x^2 - \frac{3}{\pi}x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(\frac{3\pi}{2}-\pi)} = \frac{4}{3\pi^3}x^3 - \frac{2}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{3\pi}x$$

Por tanto, $F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) =$

$$(\operatorname{sen} 0)L_0(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\operatorname{sen} \pi)L_2(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$

$$(0)L_0(x)+(1)L_1(x)+(0)L_2(x)+(-1)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3-\frac{8}{\pi^2}x^2+\frac{16}{3\pi}x$$

$$G(x) = g(x_0)L_0(x) + g(x_1)L_1(x) + g(x_2)L_2(x) + g(x_3)L_3(x) =$$

$$(\cos 0)L_0(x) + (\cos \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\cos \pi)L_2(x) + (\cos \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{8}{\pi^2}x^2 - \frac{3}{\pi}x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(\frac{3\pi}{2}-\pi)} = \frac{4}{3\pi^3}x^3 - \frac{2}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{3\pi}x$$

Por tanto, $F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) =$

$$(\operatorname{sen} 0)L_0(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\operatorname{sen} \pi)L_2(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$

$$(0)L_0(x)+(1)L_1(x)+(0)L_2(x)+(-1)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3-\frac{8}{\pi^2}x^2+\frac{16}{3\pi}x$$

$$G(x) = g(x_0)L_0(x) + g(x_1)L_1(x) + g(x_2)L_2(x) + g(x_3)L_3(x) =$$

$$(\cos 0)L_0(x) + (\cos \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\cos \pi)L_2(x) + (\cos \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$

$$(1)L_0(x) + (0)L_1(x) + (-1)L_2(x) + (0)L_3(x) =$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución: Calculamos los polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{3\pi^3}x^3+\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{11}{3\pi}x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{10}{\pi^2}x^2 + \frac{6}{\pi}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{8}{\pi^2}x^2 - \frac{3}{\pi}x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(\frac{3\pi}{2}-\pi)} = \frac{4}{3\pi^3}x^3 - \frac{2}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{3\pi}x$$

Por tanto, $F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) =$

$$(\operatorname{sen} 0)L_0(x) + (\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\operatorname{sen}\pi)L_2(x) + (\operatorname{sen}\tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$

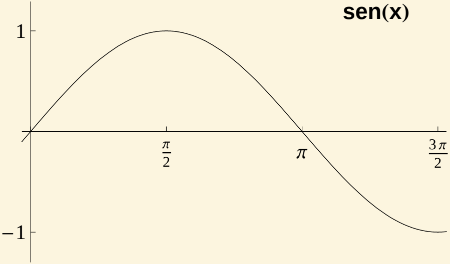
$$(0)L_0(x)+(1)L_1(x)+(0)L_2(x)+(-1)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3-\frac{8}{\pi^2}x^2+\frac{16}{3\pi}x$$

$$G(x) = g(x_0)L_0(x) + g(x_1)L_1(x) + g(x_2)L_2(x) + g(x_3)L_3(x) =$$

$$(\cos 0)L_0(x) + (\cos\tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\cos\pi)L_2(x) + (\cos\tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$

$$(1)L_0(x) + (0)L_1(x) + (-1)L_2(x) + (0)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{4}{\pi^2}x^2 - \frac{2}{3\pi}x + 1$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.



Por tanto, $F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) =$

$$(\operatorname{sen} 0)L_0(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\operatorname{sen} \pi)L_2(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$

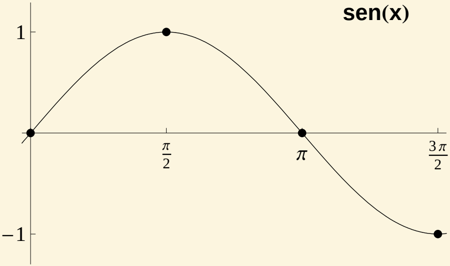
$$(0)L_0(x)+(1)L_1(x)+(0)L_2(x)+(-1)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{16}{3\pi}x$$

$$G(x) = g(x_0)L_0(x) + g(x_1)L_1(x) + g(x_2)L_2(x) + g(x_3)L_3(x) =$$

$$(\cos 0)L_0(x) + (\cos \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\cos \pi)L_2(x) + (\cos \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$

$$(1)L_0(x) + (0)L_1(x) + (-1)L_2(x) + (0)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{4}{\pi^2}x^2 - \frac{2}{3\pi}x + 1$$

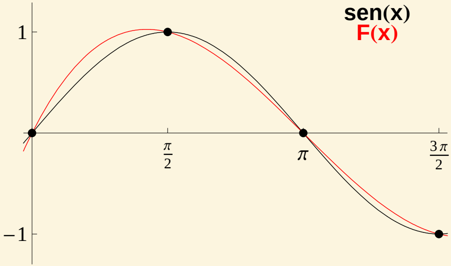
Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.



Por tanto, $F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) =$
$$(\operatorname{sen} 0)L_0(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\operatorname{sen} \pi)L_2(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$
$$(0)L_0(x)+(1)L_1(x)+(0)L_2(x)+(-1)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{16}{3\pi}x$$

$$G(x) = g(x_0)L_0(x) + g(x_1)L_1(x) + g(x_2)L_2(x) + g(x_3)L_3(x) =$$
$$(\cos 0)L_0(x) + (\cos \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\cos \pi)L_2(x) + (\cos \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$
$$(1)L_0(x) + (0)L_1(x) + (-1)L_2(x) + (0)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{4}{\pi^2}x^2 - \frac{2}{3\pi}x + 1$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.



Por tanto, $F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) =$

$$(\operatorname{sen} 0)L_0(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\operatorname{sen} \pi)L_2(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$

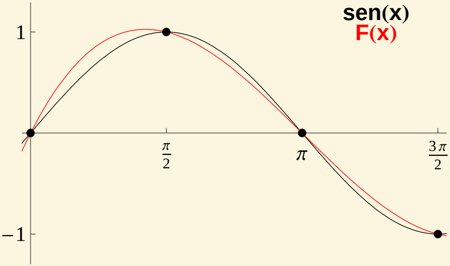
$$(0)L_0(x)+(1)L_1(x)+(0)L_2(x)+(-1)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{16}{3\pi}x$$

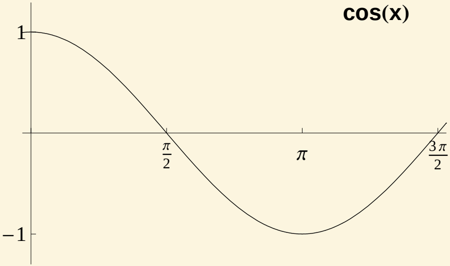
$$G(x) = g(x_0)L_0(x) + g(x_1)L_1(x) + g(x_2)L_2(x) + g(x_3)L_3(x) =$$

$$(\cos 0)L_0(x) + (\cos \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\cos \pi)L_2(x) + (\cos \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$

$$(1)L_0(x) + (0)L_1(x) + (-1)L_2(x) + (0)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{4}{\pi^2}x^2 - \frac{2}{3\pi}x + 1$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

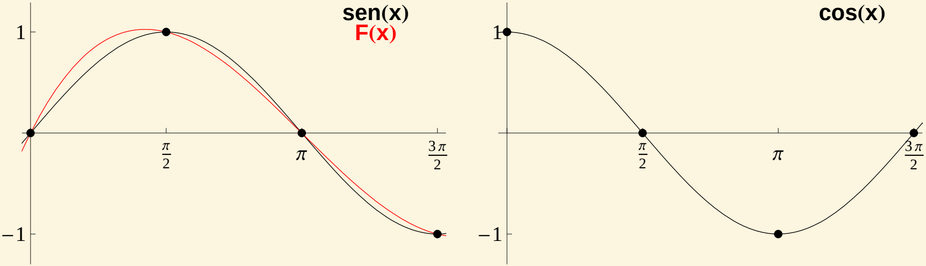




Por tanto,
$$F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) = (\operatorname{sen} 0)L_0(x) + (\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\operatorname{sen}\pi)L_2(x) + (\operatorname{sen}\tfrac{3\pi}{2})L_3(x) = (0)L_0(x)+(1)L_1(x)+(0)L_2(x)+(-1)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{16}{3\pi}x$$

$$G(x) = g(x_0)L_0(x) + g(x_1)L_1(x) + g(x_2)L_2(x) + g(x_3)L_3(x) = (\cos 0)L_0(x) + (\cos\tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\cos\pi)L_2(x) + (\cos\tfrac{3\pi}{2})L_3(x) = (1)L_0(x) + (0)L_1(x) + (-1)L_2(x) + (0)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{4}{\pi^2}x^2 - \frac{2}{3\pi}x + 1$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

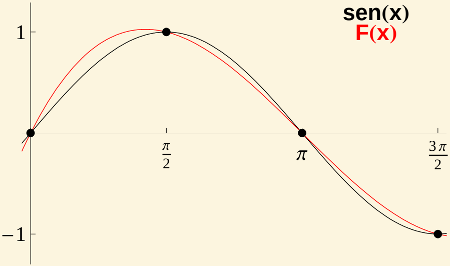


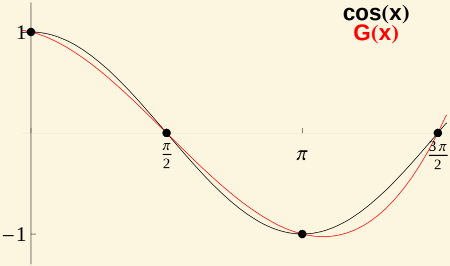
Por tanto,

$$F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) =$$
$$(\operatorname{sen} 0)L_0(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\operatorname{sen} \pi)L_2(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$
$$(0)L_0(x)+(1)L_1(x)+(0)L_2(x)+(-1)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{16}{3\pi}x$$

$$G(x) = g(x_0)L_0(x) + g(x_1)L_1(x) + g(x_2)L_2(x) + g(x_3)L_3(x) =$$
$$(\cos 0)L_0(x) + (\cos \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\cos \pi)L_2(x) + (\cos \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) =$$
$$(1)L_0(x) + (0)L_1(x) + (-1)L_2(x) + (0)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{4}{\pi^2}x^2 - \frac{2}{3\pi}x + 1$$

Ejercicio: Calcular por el método de Lagrange los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.





Por tanto,

$$F(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) = (\operatorname{sen} 0)L_0(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\operatorname{sen} \pi)L_2(x) + (\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) = (0)L_0(x)+(1)L_1(x)+(0)L_2(x)+(-1)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{16}{3\pi}x$$

$$G(x) = g(x_0)L_0(x) + g(x_1)L_1(x) + g(x_2)L_2(x) + g(x_3)L_3(x) = (\cos 0)L_0(x) + (\cos \tfrac{\pi}{2})L_1(x) + (\cos \pi)L_2(x) + (\cos \tfrac{3\pi}{2})L_3(x) = (1)L_0(x) + (0)L_1(x) + (-1)L_2(x) + (0)L_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{4}{\pi^2}x^2 - \frac{2}{3\pi}x + 1$$