Cálculo Numérico y Estadística

Primera parte: Cálculo Numérico

José Luis Bravo

Curso 2019/2020
Segundo semestre

Polinomio de interpolación en la forma de Newton:

En este apartado veremos otra forma de calcular el polinomio $P(x)$, de grado $\leq n$, que interpola los datos de una tabla como la siguiente,

x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

en donde $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Por comodidad de notación (a la hora de hacer los cálculos), supondremos que los valores y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Por tanto, buscamos $P(x)$ tal que $P(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Para ello, necesitamos definir las **diferencias divididas** de la "función" $f(x)$.

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,..., x_m:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,..., x_m:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Por notación, la dif. div. de orden cero, relativa a x_0 es $f[x_0] = f(x_0)$.

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,..., x_m:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Por notación, la dif. div. de orden cero, relativa a x_0 es $f[x_0] = f(x_0)$.

Por ejemplo,

$f[x_0, x_1, x_2] =$

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,..., x_m:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Por notación, la dif. div. de orden cero, relativa a x_0 es $f[x_0] = f(x_0)$.

Por ejemplo,

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} =$

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,..., x_m:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Por notación, la dif. div. de orden cero, relativa a x_0 es $f[x_0] = f(x_0)$.

Por ejemplo,

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} = \frac{\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}}{x_0-x_2}$$

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,..., x_m:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Por notación, la dif. div. de orden cero, relativa a x_0 es $f[x_0] = f(x_0)$.

Por ejemplo,

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} = \frac{\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}}{x_0-x_2}$

$f[x_0, x_1, x_2, x_3] =$

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,..., x_m:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Por notación, la dif. div. de orden cero, relativa a x_0 es $f[x_0] = f(x_0)$.

Por ejemplo,

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0,x_1] - f[x_1,x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}}{x_0-x_2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0,x_1,x_2] - f[x_1,x_2,x_3]}{x_0 - x_3} =$$

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,..., x_m:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Por notación, la dif. div. de orden cero, relativa a x_0 es $f[x_0] = f(x_0)$.

Por ejemplo,

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} = \frac{\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}}{x_0-x_2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_0-x_3} = \frac{\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} - \frac{f[x_1,x_2]-f[x_2,x_3]}{x_1-x_3}}{x_0-x_3} =$$

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,..., x_m:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Por notación, la dif. div. de orden cero, relativa a x_0 es $f[x_0] = f(x_0)$.

Por ejemplo,

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} = \frac{\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}}{x_0-x_2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_0-x_3} = \frac{\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} - \frac{f[x_1,x_2]-f[x_2,x_3]}{x_1-x_3}}{x_0-x_3} =$$

$$\frac{\frac{\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}}{x_0-x_2} - \frac{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}}{x_1-x_3}}{x_0-x_3}$$

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,..., x_m:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Por notación, la dif. div. de orden cero, relativa a x_0 es $f[x_0] = f(x_0)$.

Por ejemplo,

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} = \frac{\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}}{x_0-x_2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_0-x_3} = \frac{\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} - \frac{f[x_1,x_2]-f[x_2,x_3]}{x_1-x_3}}{x_0-x_3} =$$

$$\frac{\frac{\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}}{x_0-x_2} - \frac{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}}{x_1-x_3}}{x_0-x_3}$$

...

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,..., x_m:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Debe observarse que la ordenación de $x_0, x_1, \ldots, x_m$ en $f[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ es irrelevante.

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,..., x_m:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \dots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Debe observarse que la ordenación de $x_0, x_1, \dots, x_m$ en $f[x_0, x_1, \dots, x_m]$ es irrelevante. Por ejemplo, $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f[x_1, x_0]$

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,..., x_m:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Debe observarse que la ordenación de $x_0, x_1, \ldots, x_m$ en $f[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ es irrelevante. Por ejemplo, $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f[x_1, x_0]$

<u>Ejercicio</u>: Comprobar que $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_2, x_1] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_1, x_0, x_2] = \cdots$.

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\ldots$, $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,$\ldots$, x_m:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Debe observarse que la ordenación de $x_0, x_1, \ldots, x_m$ en $f[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ es irrelevante. Por ejemplo, $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f[x_1, x_0]$

Ejercicio: Comprobar que $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_2, x_1] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_1, x_0, x_2] = \cdots$.

¿Para qué sirven las diferencias divididas?

Diferencias divididas

Supongamos que $f(x)$ es una función que está definida en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \neq x_j$ si $(i \neq j)$. Disponemos, por tanto, de los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Diferencia dividida de primer orden, relativa a los puntos x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Diferencia dividida de orden m, relativa a los puntos x_0, x_1,..., x_m:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Puede demostrarse (no es inmediato) que el polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que interpola a la función $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se puede escribir como

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
y_i	2	-1	1	0.5

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$
$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$.

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \dots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que, $P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) +$
$f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	x_0	$f(x_0)$			
			$f[x_0, x_1]$		
1	x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
			$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
2	x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
			$f[x_2, x_3]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	x_0	$f(x_0)$			
			$f[x_0, x_1]$		
1	x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
			$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
2	x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
			$f[x_2, x_3]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$.

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	x_0	$f(x_0)$			
			$f[x_0, x_1]$		
1	x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
			$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
2	x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
			$f[x_2, x_3]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$.

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	x_0	$f(x_0)$			
			$f[x_0, x_1]$		
1	x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
			$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
2	x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
			$f[x_2, x_3]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$.

Sustituimos las dos primeras columnas:

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	2			
			$f[x_0, x_1]$		
1	0.5	-1		$f[x_0, x_1, x_2]$	
			$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
2	1	1		$f[x_1, x_2, x_3]$	
			$f[x_2, x_3]$		
3	1.5	0.5			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$. Sustituimos las dos primeras columnas:

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] := \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	2			
			$f[x_0, x_1]$		
1	0.5	-1		$f[x_0, x_1, x_2]$	
			$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
2	1	1		$f[x_1, x_2, x_3]$	
			$f[x_2, x_3]$		
3	1.5	0.5			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$. Sustituimos las dos primeras columnas:

Calculamos la tercera:

$f[x_0, x_1] =$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	2			
			$f[x_0, x_1]$		
1	0.5	-1		$f[x_0, x_1, x_2]$	
			$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
2	1	1		$f[x_1, x_2, x_3]$	
			$f[x_2, x_3]$		
3	1.5	0.5			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$. Sustituimos las dos primeras columnas:

Calculamos la tercera:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{0 - 0.5} = -6$$

$$f[x_1, x_2] =$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	2			
			$f[x_0, x_1]$		
1	0.5	-1		$f[x_0, x_1, x_2]$	
			$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
2	1	1		$f[x_1, x_2, x_3]$	
			$f[x_2, x_3]$		
3	1.5	0.5			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$. Sustituimos las dos primeras columnas:

Calculamos la tercera:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{0 - 0.5} = -6$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-1 - 1}{0.5 - 1} = 4$$

$$f[x_2, x_3] =$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	2			
			$f[x_0, x_1]$		
1	0.5	-1		$f[x_0, x_1, x_2]$	
			$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
2	1	1		$f[x_1, x_2, x_3]$	
			$f[x_2, x_3]$		
3	1.5	0.5			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$. Sustituimos las dos primeras columnas:

Calculamos la tercera:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{0 - 0.5} = -6$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-1 - 1}{0.5 - 1} = 4$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} = \frac{1 - 0.5}{1 - 1.5} = -1$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	2			
			-6		
1	0.5	-1		$f[x_0, x_1, x_2]$	
			4		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
2	1	1		$f[x_1, x_2, x_3]$	
			-1		
3	1.5	0.5			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$. Sustituimos las dos primeras columnas:

Calculamos la cuarta:

$f[x_0, x_1, x_2] =$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	2			
			-6		
1	0.5	-1		$f[x_0, x_1, x_2]$	
			4		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
2	1	1		$f[x_1, x_2, x_3]$	
			-1		
3	1.5	0.5			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$. Sustituimos las dos primeras columnas:

Calculamos la cuarta:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0,x_1] - f[x_1,x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{-6-4}{0-1} = 10$$

$$f[x_1, x_2, x_3] =$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	2			
			-6		
1	0.5	-1		$f[x_0, x_1, x_2]$	
			4		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
2	1	1		$f[x_1, x_2, x_3]$	
			-1		
3	1.5	0.5			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$. Sustituimos las dos primeras columnas:

Calculamos la cuarta:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0,x_1] - f[x_1,x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{-6-4}{0-1} = 10$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_2,x_3]}{x_1 - x_3} = \frac{4-(-1)}{0.5-1.5} = -5$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	2			
			-6		
1	0.5	-1		10	
			4		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
2	1	1		-5	
			-1		
3	1.5	0.5			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$. Sustituimos las dos primeras columnas:

Finalmente:

$f[x_0, x_1, x_2, x_3] =$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	2			
			-6		
1	0.5	-1		10	
			4		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
2	1	1		-5	
			-1		
3	1.5	0.5			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$. Sustituimos las dos primeras columnas:

Finalmente:

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0,x_1,x_2] - f[x_1,x_2,x_3]}{x_0 - x_3} = \frac{10-(-5)}{0-1.5} = -10$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	2			
			-6		
1	0.5	-1		10	
			4		-10
2	1	1		-5	
			-1		
3	1.5	0.5			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$.

Sustituimos las dos primeras columnas:

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	2			
			-6		
1	0.5	-1		10	
			4		-10
2	1	1		-5	
			-1		
3	1.5	0.5			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$.

Sustituimos las dos primeras columnas:

Por tanto,

$P(x) =$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_j]$	$f[x_i,x_j,x_k]$	$f[x_i,x_j,x_k,x_l]$
0	0	2			
			-6		
1	0.5	-1		10	
			4		-10
2	1	1		-5	
			-1		
3	1.5	0.5			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$. Sustituimos las dos primeras columnas:

Por tanto,

$$P(x) = 2 + (-6)(x-0) + 10(x-0)(x-0.5) + (-10)(x-0)(x-0.5)(x-1) =$$

Ejemplo: Vamos a calcular el polinomio $P(x)$ (que ya conocemos) de grado ≤ 3 que interpola los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Suponemos que los datos y_i son de la forma $y_i = f(x_i)$. Sabemos que,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

La forma más práctica de calcularlo es formar la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	2			
			-6		
1	0.5	-1		10	
			4		-10
2	1	1		-5	
			-1		
3	1.5	0.5			

de la que extraeremos la parte superior para formar $P(x)$.

Sustituimos las dos primeras columnas:

Por tanto,

$$P(x) = 2 + (-6)(x-0) + 10(x-0)(x-0.5) + (-10)(x-0)(x-0.5)(x-1) = -10x^3 + 25x^2 - 16x + 2$$

que coincide, lógicamente, con el que calculamos con la fórmula de Lagrange.

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Acabamos de ver que el polinomio de interpolación de grado ≤ 3 en la forma de Newton, correspondiente a los datos de la tabla de la izquierda, se calcula como

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 2 + (-6)(x - 0) + 10(x - 0)(x - 0.5) + (-10)(x - 0)(x - 0.5)(x - 1) \\ &= -10x^3 + 25x^2 - 16x + 2 \end{aligned}$$

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Acabamos de ver que el polinomio de interpolación de grado ≤ 3 en la forma de Newton, correspondiente a los datos de la tabla de la izquierda, se calcula como

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 2 + (-6)(x - 0) + 10(x - 0)(x - 0.5) + (-10)(x - 0)(x - 0.5)(x - 1) \\ &= -10x^3 + 25x^2 - 16x + 2 \end{aligned}$$

Sin embargo, si ahora nos pidiesen calcular el correspondiente a la tabla

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	0	-0.25	0	0.75

ninguno de los cálculos que hemos hecho nos servirían, pues los valores de $f(x)$ han cambiado, y tendríamos que calcular, nuevamente, todas las diferencias divididas. En ese caso, sería mejor haber utilizado la fórmula de Lagrange.

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Acabamos de ver que el polinomio de interpolación de grado ≤ 3 en la forma de Newton, correspondiente a los datos de la tabla de la izquierda, se calcula como

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= 2 + (-6)(x-0) + 10(x-0)(x-0.5) + (-10)(x-0)(x-0.5)(x-1) \\ &= -10x^3 + 25x^2 - 16x + 2 \end{aligned}$$

Pero si lo que nos piden es calcular el polinomio $Q(x)$, de grado ≤ 4, correspondiente a la tabla:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	3
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5	-1

sirve todo lo que hemos hecho, pues

$$Q(x) = P(x) + f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Solo tenemos que añadir a la tabla que habíamos calculado los nuevos datos,

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	2			
			-6		
1	0.5	-1		10	
			4		-10
2	1	1		-5	
			-1		
3	1.5	0.5			

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	3
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5	-1

$$Q(x) = P(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Solo tenemos que añadir a la tabla que habíamos calculado los nuevos datos, es decir

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m]$
0	0	2				
			-6			
1	0.5	-1		10		
			4		-10	
2	1	1		-5		?
			-1		?	
3	1.5	0.5		?		
			?			
4	?	?				

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	3
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5	-1

$$Q(x) = P(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Solo tenemos que añadir a la tabla que habíamos calculado los nuevos datos, es decir

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m]$
0	0	2				
			-6			
1	0.5	-1		10		
			4		-10	
2	1	1		-5		?
			-1		?	
3	1.5	0.5		?		
			?			
4	3	-1				

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	3
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5	-1

$$Q(x) = P(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Solo tenemos que añadir a la tabla que habíamos calculado los nuevos datos, es decir

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m]$
0	0	2				
			-6			
1	0.5	-1		10		
			4		-10	
2	1	1		-5		?
			-1		?	
3	1.5	0.5		?		
			-1			
4	3	-1				

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	3
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5	-1

$$Q(x) = P(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Solo tenemos que añadir a la tabla que habíamos calculado los nuevos datos, es decir

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m]$
0	0	2				
			-6			
1	0.5	-1		10		
			4		-10	
2	1	1		-5		?
			-1		?	
3	1.5	0.5		0		
			-1			
4	3	-1				

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	3
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5	-1

$$Q(x) = P(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Solo tenemos que añadir a la tabla que habíamos calculado los nuevos datos, es decir

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m]$
0	0	2				
			-6			
1	0.5	-1		10		
			4		-10	
2	1	1		-5		?
			-1		2	
3	1.5	0.5		0		
			-1			
4	3	-1				

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	3
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5	-1

$$Q(x) = P(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Solo tenemos que añadir a la tabla que habíamos calculado los nuevos datos, es decir

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m]$
0	0	2				
			-6			
1	0.5	-1		10		
			4		-10	
2	1	1		-5		4
			-1		2	
3	1.5	0.5		0		
			-1			
4	3	-1				

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	3
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5	-1

$$Q(x) = P(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Solo tenemos que añadir a la tabla que habíamos calculado los nuevos datos, es decir

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m]$
0	0	2				
			-6			
1	0.5	-1		10		
			4		-10	
2	1	1		-5		4
			-1		2	
3	1.5	0.5		0		
			-1			
4	3	-1				

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	3
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5	-1

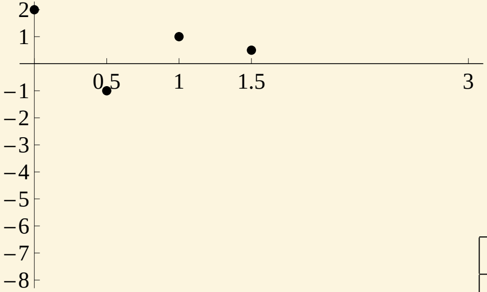
Por tanto,

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= -10x^3 + 25x^2 - 16x + 2 + 4(x - 0)(x - 0.5)(x - 1)(x - 1.5) \\ &= 4x^4 - 22x^3 + 36x^2 - 19x + 2 \end{aligned}$$

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Solo tenemos que añadir a la tabla que habíamos calculado los nuevos datos, es decir



i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	3
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5	-1

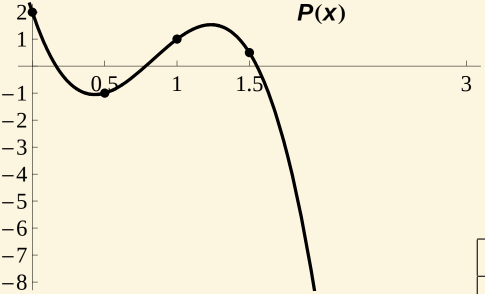
Por tanto,

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= -10x^3 + 25x^2 - 16x + 2 + 4(x - 0)(x - 0.5)(x - 1)(x - 1.5) \\ &= 4x^4 - 22x^3 + 36x^2 - 19x + 2 \end{aligned}$$

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Solo tenemos que añadir a la tabla que habíamos calculado los nuevos datos, es decir



i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	3
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5	-1

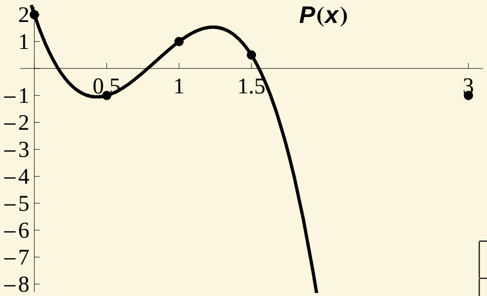
Por tanto,

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= -10x^3 + 25x^2 - 16x + 2 + 4(x - 0)(x - 0.5)(x - 1)(x - 1.5) \\ &= 4x^4 - 22x^3 + 36x^2 - 19x + 2 \end{aligned}$$

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Solo tenemos que añadir a la tabla que habíamos calculado los nuevos datos, es decir



i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	3
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5	-1

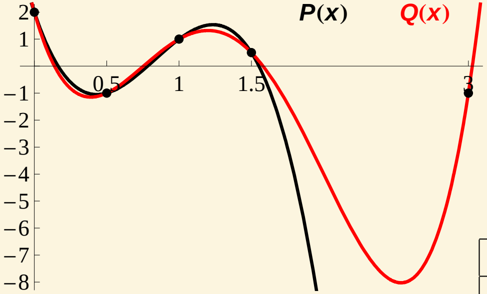
Por tanto,

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= -10x^3 + 25x^2 - 16x + 2 + 4(x - 0)(x - 0.5)(x - 1)(x - 1.5) \\ &= 4x^4 - 22x^3 + 36x^2 - 19x + 2 \end{aligned}$$

Pegas y ventajas de la fórmula de interpolación de Newton

i	0	1	2	3
x_i	0	0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5

Solo tenemos que añadir a la tabla que habíamos calculado los nuevos datos, es decir



i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	3
$y_i = f(x_i)$	2	-1	1	0.5	-1

Por tanto,

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= -10x^3 + 25x^2 - 16x + 2 + 4(x - 0)(x - 0.5)(x - 1)(x - 1.5) \\ &= 4x^4 - 22x^3 + 36x^2 - 19x + 2 \end{aligned}$$

Ejercicio: Calcular por el método de Newton los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de menor grado posible, que interpolan, respectivamente, a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Solución:

Para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ construimos la tabla:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	0	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{4}{\pi^2}$	$\frac{8}{3\pi^3}$
1	$\frac{\pi}{2}$	1	$-\frac{2}{\pi}$	0	
2	π	0	$-\frac{2}{\pi}$		
3	$\frac{3\pi}{2}$	-1			

con lo que,

$$F(x) = 0 + \frac{2}{\pi}(x-0) - \frac{4}{\pi^2}(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{3\pi^3}(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{16}{3\pi}x$$

Para $g(x) = \cos x$ tenemos:

i	x_i	$g(x_i)$	$g[x_i, x_j]$	$g[x_i, x_j, x_k]$	$g[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	1	$-\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{8}{3\pi^3}$
1	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{2}{\pi}$	$\frac{4}{\pi^2}$	
2	π	-1	$\frac{2}{\pi}$		
3	$\frac{3\pi}{2}$	0			

con lo que,

$$G(x) = 1 - \frac{2}{\pi}(x-0) + 0(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{3\pi^3}(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{4}{\pi^2}x^2 - \frac{2}{3\pi}x + 1$$