

Cálculo Numérico y Estadística

Primera parte: Cálculo Numérico

José Luis Bravo

Curso 2019/2020
Segundo semestre



Método de eliminación de Gauss:

El método de eliminación de Gauss es un método directo de resolución de un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas (que suponemos no singular)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

que consiste en transformar el sistema original en uno equivalente triangular superior,

$$a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1$$

$$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

.....

$$a'_{n-1\ n-1}x_{n-1} + a'_{n-1\ n}x_n = b'_{n-1}$$

$$a'_{nn}x_n = b'_n$$

cuya resolución (comenzando por la última ecuación) resulta mucho más sencilla.

Método de eliminación de Gauss:

Aplicación del método: Suponemos que (el *pivote*) $a_{11} \neq 0$. Si fuese $a_{11} = 0$, cambiamos la ordenación de las ecuaciones para que sea $a_{11} \neq 0$.

Para $i = 2, 3, \dots, n$, cambiamos la ecuación i -ésima por $(ec\ i) - \frac{a_{i1}}{a_{11}}(ec\ 1)$:

$$ec\ 1: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$ec\ 2: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots
.....

$$ec\ n: \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Método de eliminación de Gauss:

Aplicación del método: Suponemos que (el *pivote*) $a_{11} \neq 0$. Si fuese $a_{11} = 0$, cambiamos la ordenación de las ecuaciones para que sea $a_{11} \neq 0$.

Para $i = 2, 3, \dots, n$, cambiamos la ecuación i -ésima por $(ec\ i) - \frac{a_{i1}}{a_{11}}(ec\ 1)$:

$$ec\ 1: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$ec\ 2: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots
.....

$$ec\ n: \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

↓

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\bar{a}_{22}x_2 + \cdots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2$$

.....

$$\bar{a}_{n2}x_2 + \cdots + \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n$$

Método de eliminación de Gauss:

Aplicación del método: Suponemos que (el *pivote*) $a_{11} \neq 0$. Si fuese $a_{11} = 0$, cambiamos la ordenación de las ecuaciones para que sea $a_{11} \neq 0$.

Para $i = 2, 3, \dots, n$, cambiamos la ecuación i -ésima por $(ec\ i) - \frac{a_{i1}}{a_{11}}(ec\ 1)$:

$$ec\ 1: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$ec\ 2: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots
.....

$$ec\ n: \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

↓

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\bar{a}_{22}x_2 + \cdots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2$$

.....

$$\bar{a}_{n2}x_2 + \cdots + \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n$$

Se aplica el mismo proceso a las nuevas ecuaciones obtenidas hasta llegar al sistema triangular.

Método de eliminación de Gauss:

Aplicación del método: Suponemos que (el *pivote*) $a_{11} \neq 0$. Si fuese $a_{11} = 0$, cambiamos la ordenación de las ecuaciones para que sea $a_{11} \neq 0$.

Para $i = 2, 3, \dots, n$, cambiamos la ecuación i -ésima por $(ec\ i) - \frac{a_{i1}}{a_{11}}(ec\ 1)$:

$$ec\ 1: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$ec\ 2: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots

$$ec\ n: a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

↓

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\bar{a}_{22}x_2 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2$$

.....

$$\bar{a}_{n2}x_2 + \dots + \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n$$

Se aplica el mismo proceso a las nuevas ecuaciones obtenidas hasta llegar al sistema triangular.

Ejemplo

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10$$

Método de eliminación de Gauss:

Aplicación del método: Suponemos que (el *pivote*) $a_{11} \neq 0$. Si fuese $a_{11} = 0$, cambiamos la ordenación de las ecuaciones para que sea $a_{11} \neq 0$.

Para $i = 2, 3, \dots, n$, cambiamos la ecuación i -ésima por $(ec\ i) - \frac{a_{i1}}{a_{11}}(ec\ 1)$:

$$ec\ 1: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$ec\ 2: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots

$$ec\ n: a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

↓

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\bar{a}_{22}x_2 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2$$

.....

$$\bar{a}_{n2}x_2 + \dots + \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n$$

Se aplica el mismo proceso a las nuevas ecuaciones obtenidas hasta llegar al sistema triangular.

Ejemplo

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10$$

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$-\frac{41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

Método de eliminación de Gauss:

Aplicación del método: Suponemos que (el *pivote*) $a_{11} \neq 0$. Si fuese $a_{11} = 0$, cambiamos la ordenación de las ecuaciones para que sea $a_{11} \neq 0$.

Para $i = 2, 3, \dots, n$, cambiamos la ecuación i -ésima por $(ec\ i) - \frac{a_{i1}}{a_{11}}(ec\ 1)$:

$$ec\ 1: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$ec\ 2: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots
.....

$$ec\ n: a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

↓

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\bar{a}_{22}x_2 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2$$

.....

$$\bar{a}_{n2}x_2 + \dots + \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n$$

Se aplica el mismo proceso a las nuevas ecuaciones obtenidas hasta llegar al sistema triangular.

Ejemplo

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10$$

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$-\frac{41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$-\frac{41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41}$$

Método de eliminación de Gauss:

Aplicación del método: Suponemos que (el *pivote*) $a_{11} \neq 0$. Si fuese $a_{11} = 0$, cambiamos la ordenación de las ecuaciones para que sea $a_{11} \neq 0$.

Para $i = 2, 3, \dots, n$, cambiamos la ecuación i -ésima por $(ec\ i) - \frac{a_{i1}}{a_{11}}(ec\ 1)$:

$$ec\ 1: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$ec\ 2: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots
.....

$$ec\ n: a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

↓

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\bar{a}_{22}x_2 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2$$

.....

$$\bar{a}_{n2}x_2 + \dots + \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n$$

Se aplica el mismo proceso a las nuevas ecuaciones obtenidas hasta llegar al sistema triangular.

Ejemplo

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10$$

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$-\frac{41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$-\frac{41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41}$$

$$x_3 = \frac{187}{171}, \quad x_2 = -\frac{49}{171}, \quad x_1 = \frac{17}{9}$$

Veamos todo el proceso:

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10$$

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

→

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10$$

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

→

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \rightarrow (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1})$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10$$

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \quad \rightarrow \quad 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1})$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10$$

$$\{3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9\} - \frac{3}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \quad \rightarrow \quad 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10$$

$$\{3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9\} - \frac{3}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \quad \rightarrow \quad 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1})$$

$$\{3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9\} - \frac{3}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \quad \rightarrow \quad 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1})$$

$$\{3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9\} - \frac{3}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\{2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10\} - \frac{2}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \quad \rightarrow \quad 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\{3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9\} - \frac{3}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\{2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10\} - \frac{2}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \quad \rightarrow \quad 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\{3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9\} - \frac{3}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\{2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10\} - \frac{2}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \quad \rightarrow \quad 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\{3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9\} - \frac{3}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\{2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10\} - \frac{2}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \quad \rightarrow \quad 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\{3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9\} - \frac{3}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\{2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10\} - \frac{2}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\left\{ \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5} \right\} - \frac{\frac{11}{5}}{\frac{-41}{5}} \left\{ \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \right\} \rightarrow \frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41}$$

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \quad \rightarrow \quad 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\{3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9\} - \frac{3}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\{2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10\} - \frac{2}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41}$$

$$\left\{ \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5} \right\} - \frac{\frac{11}{5}}{\frac{-41}{5}} \left\{ \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \right\} \rightarrow \frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41}$$

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \quad \rightarrow \quad 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\{3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9\} - \frac{3}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\{2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10\} - \frac{2}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41}$$

$$\left\{ \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5} \right\} - \frac{\frac{11}{5}}{\frac{-41}{5}} \left\{ \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \right\} \rightarrow \frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41}$$

Resolvemos el sistema triangular:

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \quad \rightarrow \quad 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\{3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9\} - \frac{3}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\{2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10\} - \frac{2}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41}$$

$$\left\{ \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5} \right\} - \frac{\frac{11}{5}}{\frac{-41}{5}} \left\{ \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \right\} \rightarrow \frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41}$$

Resolvemos el sistema triangular:

$$\text{ec 3: } x_3 = \frac{187}{171}$$

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \quad \rightarrow \quad 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\{3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9\} - \frac{3}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\{2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10\} - \frac{2}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41}$$

$$\left\{ \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5} \right\} - \frac{\frac{11}{5}}{\frac{-41}{5}} \left\{ \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \right\} \rightarrow \frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41}$$

Resolvemos el sistema triangular:

$$\text{ec 3: } x_3 = \frac{187}{171}$$

$$\text{ec 2: } x_2 = \frac{-5}{41} \left(\frac{8}{5}x_3 + \frac{3}{5} \right) = \frac{-1}{41} \left(8 \frac{187}{171} + 3 \right) = \frac{-49}{171}$$

Veamos todo el proceso:

$$\text{ec 1: } 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \quad \rightarrow \quad 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$\text{ec 2: } 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\{3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9\} - \frac{3}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\{2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10\} - \frac{2}{5}\{5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14\} \rightarrow \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5}$$

$$\frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41}$$

$$\left\{ \frac{11}{5}x_2 + \frac{23}{5}x_3 = \frac{22}{5} \right\} - \frac{\frac{11}{5}}{\frac{-41}{5}} \left\{ \frac{-41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \right\} \rightarrow \frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41}$$

Resolvemos el sistema triangular:

$$\text{ec 3: } x_3 = \frac{187}{171}$$

$$\text{ec 2: } x_2 = \frac{-5}{41} \left(\frac{8}{5}x_3 + \frac{3}{5} \right) = \frac{-1}{41} \left(8 \frac{187}{171} + 3 \right) = \frac{-49}{171}$$

$$\text{ec 1: } x_1 = \frac{1}{5}(-7x_2 - 6x_3 + 14) = \frac{1}{5} \left(-7 \frac{-49}{171} - 6 \frac{187}{171} + 14 \right) = \frac{17}{9}$$

Otro ejemplo:

Otro ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

Otro ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

Otro ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \rightarrow \left\{ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \right\} - \frac{0}{2} \left\{ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \right\}$$

$$\rightarrow 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

Otro ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 & & 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 & & 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 & \rightarrow & -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 & & x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array}$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \rightarrow \left\{ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \right\} - \frac{0}{2} \left\{ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \right\}$$
$$\rightarrow 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \rightarrow \left\{ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \right\}$$
$$- \frac{(-1)}{2} \left\{ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \right\}$$
$$\rightarrow \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

Otro ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

\rightarrow

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \rightarrow \left\{ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \right\} - \frac{0}{2} \left\{ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \right\}$$

$$\rightarrow 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \rightarrow \left\{ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \right\}$$

$$- \frac{(-1)}{2} \left\{ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \right\}$$

$$\rightarrow \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \rightarrow \left\{ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \right\}$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \right\}$$

$$\rightarrow \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

Otro ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

Otro ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \quad \rightarrow \quad \left\{ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \right\} - \frac{7}{3} \left\{ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \right\}$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}x_3 - \frac{37}{6}x_4 = -\frac{22}{3}$$

Otro ejemplo:

$$\begin{array}{r} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \end{array}$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \rightarrow \left\{ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \right\} - \frac{7}{3} \left\{ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \right\}$$
$$\rightarrow \frac{3}{2}x_3 - \frac{37}{6}x_4 = -\frac{22}{3}$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \rightarrow \left\{ \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \right\} - \frac{7}{3} \left\{ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \right\}$$
$$\rightarrow \frac{9}{2}x_3 - \frac{7}{6}x_4 = -\frac{13}{3}$$

Otro ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 & & 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 & \rightarrow & 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 & & -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 & & x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 & & 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 & \rightarrow & 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 & & \frac{3}{2}x_3 - \frac{37}{6}x_4 = -\frac{22}{3} \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 & & \frac{9}{2}x_3 - \frac{7}{6}x_4 = -\frac{13}{3} \end{array}$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \rightarrow \left\{ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \right\} - \frac{7}{3} \left\{ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \right\}$$
$$\rightarrow \frac{3}{2}x_3 - \frac{37}{6}x_4 = -\frac{22}{3}$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \rightarrow \left\{ \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \right\} - \frac{7}{3} \left\{ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \right\}$$
$$\rightarrow \frac{9}{2}x_3 - \frac{7}{6}x_4 = -\frac{13}{3}$$

Otro ejemplo:

$$\begin{array}{l} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow$$
$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{3}{2}x_3 - \frac{37}{6}x_4 = -\frac{22}{3} \\ \frac{9}{2}x_3 - \frac{7}{6}x_4 = -\frac{13}{3} \end{array}$$

$$\frac{9}{2}x_3 - \frac{7}{6}x_4 = -\frac{13}{3} \rightarrow \left\{ \frac{9}{2}x_3 - \frac{7}{6}x_4 = -\frac{13}{3} \right\} - \frac{9}{2} \left\{ \frac{3}{2}x_3 - \frac{37}{6}x_4 = -\frac{22}{3} \right\}$$
$$\rightarrow \frac{52}{3}x_4 = \frac{53}{3}$$

Otro ejemplo:

$$\begin{array}{l} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{3}{2}x_3 - \frac{37}{6}x_4 = -\frac{22}{3} \\ \frac{9}{2}x_3 - \frac{7}{6}x_4 = -\frac{13}{3} \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{3}{2}x_3 - \frac{37}{6}x_4 = -\frac{22}{3} \\ \frac{52}{3}x_4 = \frac{53}{3} \end{array}$$

$$\frac{9}{2}x_3 - \frac{7}{6}x_4 = -\frac{13}{3} \rightarrow \left\{ \frac{9}{2}x_3 - \frac{7}{6}x_4 = -\frac{13}{3} \right\} - \frac{9}{2} \left\{ \frac{3}{2}x_3 - \frac{37}{6}x_4 = -\frac{22}{3} \right\}$$
$$\rightarrow \frac{52}{3}x_4 = \frac{53}{3}$$

Otro ejemplo:

$$\begin{array}{l} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{3}{2}x_3 - \frac{37}{6}x_4 = -\frac{22}{3} \\ \frac{9}{2}x_3 - \frac{7}{6}x_4 = -\frac{13}{3} \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{3}{2}x_3 - \frac{37}{6}x_4 = -\frac{22}{3} \\ \frac{52}{3}x_4 = \frac{53}{3} \end{array} \rightarrow$$

$$x_4 = \frac{53}{52}, \quad x_3 = -\frac{109}{156}, \quad x_2 = \frac{145}{156}, \quad x_1 = -\frac{17}{6}$$

Ejercicio: Comprobar que para resolver el siguiente sistema con el método de Gauss se van dando los pasos intermedios que aparecen a continuación:

$$\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ \frac{5}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 = \frac{20}{3} \\ \frac{7}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{37}{3} \\ \frac{10}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 = \frac{13}{3} \end{array} \quad \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ \frac{5}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 = \frac{20}{3} \\ -\frac{8}{5}x_3 - \frac{18}{5}x_4 = 3 \\ x_3 - 3x_4 = -9 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ \frac{5}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 = \frac{20}{3} \\ -\frac{8}{5}x_3 - \frac{18}{5}x_4 = 3 \\ -\frac{21}{4}x_4 = -\frac{57}{8} \end{array} \quad \rightarrow$$

$$x_4 = \frac{19}{14}, \quad x_3 = -\frac{69}{14}, \quad x_2 = \frac{57}{14}, \quad x_1 = \frac{13}{2}$$

Ejemplo “con errores”:

Ejemplo “con errores”:

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

Ejemplo “con errores”:

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3$$

→

$$3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

Ejemplo “con errores”:

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3$$

→

$$3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

→ (ec 2) - $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ (ec 1)

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

Ejemplo “con errores”:

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1})$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\{x_1 - x_2 + x_3 = 2\} - \frac{1}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

Ejemplo “con errores”:

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\{x_1 - x_2 + x_3 = 2\} - \frac{1}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

Ejemplo "con errores":

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1})$$

$$\{x_1 - x_2 + x_3 = 2\} - \frac{1}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

Ejemplo "con errores":

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1})$$

$$\{x_1 - x_2 + x_3 = 2\} - \frac{1}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\{2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} - \frac{2}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow -x_2 + 2x_3 = -2$$

Ejemplo “con errores”:

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\{x_1 - x_2 + x_3 = 2\} - \frac{1}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\{2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} - \frac{2}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow -x_2 + 2x_3 = -2$$

Ejemplo "con errores":

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\{x_1 - x_2 + x_3 = 2\} - \frac{1}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\{2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} - \frac{2}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_2 + 2x_3 = -2$$

Ejemplo "con errores":

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\{x_1 - x_2 + x_3 = 2\} - \frac{1}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\{2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} - \frac{2}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\epsilon x_2 + x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_2 + 2x_3 = -2$$

Ejemplo "con errores":

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\{x_1 - x_2 + x_3 = 2\} - \frac{1}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\{2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} - \frac{2}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\epsilon x_2 + x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\{-x_2 + 2x_3 = -2\} - \frac{-1}{\epsilon}\{\epsilon x_2 + x_3 = 1\} \rightarrow \frac{1+\epsilon}{\epsilon}x_3 = \frac{1+3\epsilon}{\epsilon}$$

Ejemplo "con errores":

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\{x_1 - x_2 + x_3 = 2\} - \frac{1}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\{2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} - \frac{2}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\epsilon x_2 + x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_2 + 2x_3 = -2 \quad \rightarrow \quad \frac{1+\epsilon}{\epsilon}x_3 = \frac{1+3\epsilon}{\epsilon}$$

$$\{-x_2 + 2x_3 = -2\} - \frac{-1}{\epsilon}\{\epsilon x_2 + x_3 = 1\} \rightarrow \frac{1+\epsilon}{\epsilon}x_3 = \frac{1+3\epsilon}{\epsilon}$$

Ejemplo "con errores":

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\{x_1 - x_2 + x_3 = 2\} - \frac{1}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\{2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} - \frac{2}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\epsilon x_2 + x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_2 + 2x_3 = -2 \quad \rightarrow \quad \frac{1+\epsilon}{\epsilon}x_3 = \frac{1+3\epsilon}{\epsilon}$$

$$\{-x_2 + 2x_3 = -2\} - \frac{-1}{\epsilon}\{\epsilon x_2 + x_3 = 1\} \rightarrow \frac{1+\epsilon}{\epsilon}x_3 = \frac{1+3\epsilon}{\epsilon}$$

Resolvemos el sistema triangular:

Ejemplo "con errores":

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\{x_1 - x_2 + x_3 = 2\} - \frac{1}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\{2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} - \frac{2}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\epsilon x_2 + x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_2 + 2x_3 = -2 \quad \rightarrow \quad \frac{1+\epsilon}{\epsilon}x_3 = \frac{1+3\epsilon}{\epsilon}$$

$$\{-x_2 + 2x_3 = -2\} - \frac{-1}{\epsilon}\{\epsilon x_2 + x_3 = 1\} \rightarrow \frac{1+\epsilon}{\epsilon}x_3 = \frac{1+3\epsilon}{\epsilon}$$

Resolvemos el sistema triangular:

$$\text{ec 3: } x_3 = \frac{1+3\epsilon}{1+\epsilon} \approx 1$$

Ejemplo "con errores":

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\{x_1 - x_2 + x_3 = 2\} - \frac{1}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\{2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} - \frac{2}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\epsilon x_2 + x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_2 + 2x_3 = -2 \quad \rightarrow \quad \frac{1+\epsilon}{\epsilon}x_3 = \frac{1+3\epsilon}{\epsilon}$$

$$\{-x_2 + 2x_3 = -2\} - \frac{-1}{\epsilon}\{\epsilon x_2 + x_3 = 1\} \rightarrow \frac{1+\epsilon}{\epsilon}x_3 = \frac{1+3\epsilon}{\epsilon}$$

Resolvemos el sistema triangular:

$$\text{ec 3: } x_3 = \frac{1+3\epsilon}{1+\epsilon} \approx 1$$

$$\text{ec 2: } x_2 = 0 \text{ (el valor real es 4)}$$

Ejemplo "con errores":

$$\text{ec 1: } 3x_1 + 3x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 3x_2 = 3$$

$$\text{ec 2: } x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 2}) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{ec 3: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{ec 3}) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(\text{ec 1}) \rightarrow \quad -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\{x_1 - x_2 + x_3 = 2\} - \frac{1}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$\{2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} - \frac{2}{3}\{3x_1 + 3x_2 = 3\} \rightarrow -x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\epsilon x_2 + x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad \epsilon x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_2 + 2x_3 = -2 \quad \rightarrow \quad \frac{1+\epsilon}{\epsilon}x_3 = \frac{1+3\epsilon}{\epsilon}$$

$$\{-x_2 + 2x_3 = -2\} - \frac{-1}{\epsilon}\{\epsilon x_2 + x_3 = 1\} \rightarrow \frac{1+\epsilon}{\epsilon}x_3 = \frac{1+3\epsilon}{\epsilon}$$

Resolvemos el sistema triangular:

$$\text{ec 3: } x_3 = \frac{1+3\epsilon}{1+\epsilon} \approx 1$$

$$\text{ec 2: } x_2 = 0 \text{ (el valor real es 4)}$$

$$\text{ec 1: } x_1 = 1 \text{ (el valor real es -3)}$$

Método de eliminación de Gauss con elección de pivote (I):

Para minimizar los errores de redondeo que se cometen al realizar las operaciones necesarias para aplicar el método de Gauss debemos elegir el pivote de forma conveniente. En la aplicación del método de Gauss con “**pivote parcial**” procederemos de la siguiente forma:

En cada etapa del proceso, para pasar de un sistema de la forma

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

a otro equivalente de la forma

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\bar{a}_{22}x_2 + \cdots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2$$

.....

$$\bar{a}_{n2}x_2 + \cdots + \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n$$

reordenamos las ecuaciones originales para que el “**pivote**” a_{11} verifique

$$|a_{11}| = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{i1}|.$$

Ejemplo:

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \quad \rightarrow \{3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8\} - \frac{0}{2}\{2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2\}$$

$$\rightarrow 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 & & 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 & & 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 & \rightarrow & -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 & & x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array}$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \rightarrow \{3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8\} - \frac{0}{2}\{2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2\}$$
$$\rightarrow 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \rightarrow \{-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3\}$$
$$-\frac{(-1)}{2}\{2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2\}$$
$$\rightarrow \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 & & 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 & & 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 & \rightarrow & -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 & & x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array}$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \rightarrow \{3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8\} - \frac{0}{2}\{2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2\}$$
$$\rightarrow 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \rightarrow \{-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3\}$$
$$-\frac{(-1)}{2}\{2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2\}$$
$$\rightarrow \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \rightarrow \{x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4\}$$
$$-\frac{1}{2}\{2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2\}$$
$$\rightarrow \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \end{array}$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \rightarrow \left\{ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \right\} - \frac{3}{\left(\frac{7}{2}\right)} \left\{ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \right\}$$
$$\rightarrow -\frac{9}{7}x_3 + \frac{37}{7}x_4 = \frac{44}{7}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \end{array}$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \rightarrow \left\{ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \right\} - \frac{3}{\left(\frac{7}{2}\right)} \left\{ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \right\}$$
$$\rightarrow -\frac{9}{7}x_3 + \frac{37}{7}x_4 = \frac{44}{7}$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \rightarrow \left\{ \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \right\} - \left(\frac{7}{\frac{7}{2}}\right) \left\{ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \right\}$$
$$\rightarrow 3x_3 + 5x_4 = 3$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$-\frac{9}{7}x_3 + \frac{37}{7}x_4 = \frac{44}{7}$$

$$3x_3 + 5x_4 = 3$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$-\frac{9}{7}x_3 + \frac{37}{7}x_4 = \frac{44}{7}$$

$$3x_3 + 5x_4 = 3$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$-\frac{9}{7}x_3 + \frac{37}{7}x_4 = \frac{44}{7}$$

$$3x_3 + 5x_4 = 3$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$3x_3 + 5x_4 = 3$$

$$-\frac{9}{7}x_3 + \frac{37}{7}x_4 = \frac{44}{7}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \\ 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \\ -\frac{9}{7}x_3 + \frac{37}{7}x_4 = \frac{44}{7} \\ 3x_3 + 5x_4 = 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2 \\ 3x_3 + 5x_4 = 3 \\ -\frac{9}{7}x_3 + \frac{37}{7}x_4 = \frac{44}{7} \end{array}$$

$$-\frac{9}{7}x_3 + \frac{37}{7}x_4 = \frac{44}{7} \rightarrow \left\{ -\frac{9}{7}x_3 + \frac{37}{7}x_4 = \frac{44}{7} \right\} - \frac{-9}{3} \left\{ 3x_3 + 5x_4 = 3 \right\}$$
$$\rightarrow \frac{52}{7}x_4 = \frac{53}{7}$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$-\frac{9}{7}x_3 + \frac{37}{7}x_4 = \frac{44}{7}$$

$$3x_3 + 5x_4 = 3$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$3x_3 + 5x_4 = 3$$

$$-\frac{9}{7}x_3 + \frac{37}{7}x_4 = \frac{44}{7}$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$3x_3 + 5x_4 = 3$$

$$\frac{52}{7}x_4 = \frac{53}{7}$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 5$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$-\frac{9}{7}x_3 + \frac{37}{7}x_4 = \frac{44}{7}$$

$$3x_3 + 5x_4 = 3$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$3x_3 + 5x_4 = 3$$

$$-\frac{9}{7}x_3 + \frac{37}{7}x_4 = \frac{44}{7}$$

→

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 - 5x_4 = 2$$

$$3x_3 + 5x_4 = 3$$

$$\frac{52}{7}x_4 = \frac{53}{7}$$

→

$$x_4 = \frac{53}{52}, \quad x_3 = -\frac{109}{156},$$

$$x_2 = \frac{145}{156}, \quad x_1 = -\frac{17}{6}$$

Método de eliminación de Gauss con elección de pivote (II):

Para minimizar aún más los errores de redondeo podemos aplicar el método de Gauss con “**pivote total**”. En ese caso, en cada etapa del proceso, pasaremos de un sistema de la forma

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

a otro equivalente de la forma

$$a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \cdots + a'_{1n}x'_n = b'_1$$

$$a'_{22}x'_2 + \cdots + a'_{2n}x'_n = b'_2$$

.....

$$a'_{n2}x'_2 + \cdots + a'_{nn}x'_n = b'_n$$

reordenando las ecuaciones (e incógnitas) originales para que $a'_{11} = a_{IJ}$ y $x'_1 = x_J$, siendo

$$|a_{IJ}| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|.$$

Ejemplo:

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$-x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2$$

$$-5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3$$

$$-3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} -5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3 \\ -3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

$$-3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4$$

$$-x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2 \rightarrow \{-x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2\}$$

$$-\frac{(-1)}{-6} \{-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8\}$$

$$\rightarrow 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -\frac{10}{3}$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$\rightarrow -5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

$$-3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4$$

$$-x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2 \rightarrow \{-x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2\}$$

$$-\frac{(-1)}{-6} \{-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8\}$$

$$\rightarrow 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -\frac{10}{3}$$

$$-5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3 \rightarrow \{-5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3\}$$

$$-\frac{(-5)}{-6} \{-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8\}$$

$$\rightarrow -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{41}{6}x_4 = -\frac{11}{3}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 & & -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 & \rightarrow & -x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 & & -5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 & & -3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} -x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2 & \rightarrow \{ -x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2 \} \\ & \quad -\frac{(-1)}{-6} \{ -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \} \end{aligned}$$

$$\rightarrow 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -\frac{10}{3}$$

$$\begin{aligned} -5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3 & \rightarrow \{ -5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3 \} \\ & \quad -\frac{(-5)}{-6} \{ -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \} \end{aligned}$$

$$\rightarrow -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{41}{6}x_4 = -\frac{11}{3}$$

$$\begin{aligned} -3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 & \rightarrow \{ -3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \} \\ & \quad -\frac{(-3)}{-6} \{ -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \} \end{aligned}$$

$$\rightarrow x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$-x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2$$

$$-5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3$$

$$-3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -\frac{10}{3}$$

$$-x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{41}{6}x_4 = -\frac{11}{3}$$

$$x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$-x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2$$

$$-5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3$$

$$-3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -\frac{10}{3}$$

$$-x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{41}{6}x_4 = -\frac{11}{3}$$

$$x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$-x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2$$

$$-5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3$$

$$-3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -\frac{10}{3}$$

$$-x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{41}{6}x_4 = -\frac{11}{3}$$

$$x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$-\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3}$$

$$\frac{11}{6}x_4 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{10}{3}$$

$$\frac{1}{2}x_4 + x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 0$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2 \\ -5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3 \\ -3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -\frac{10}{3} \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{41}{6}x_4 = -\frac{11}{3} \\ x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{11}{6}x_4 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{10}{3} \\ \frac{1}{2}x_4 + x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{11}{6}x_4 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{10}{3} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{11}{6}x_4 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{10}{3} \\ -\frac{11}{6}x_4 - \frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \end{array} \right\} \\ \rightarrow \frac{71}{41}x_1 + \frac{26}{41}x_2 = -\frac{177}{41} \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 & & -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 & \rightarrow & -x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 & & -5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 & & -3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 & & -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -\frac{10}{3} & \rightarrow & -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{41}{6}x_4 = -\frac{11}{3} & & \frac{11}{6}x_4 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{10}{3} \\ x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0 & & \frac{1}{2}x_4 + x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{11}{6}x_4 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{10}{3} & \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{11}{6}x_4 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{10}{3} \\ -\frac{11}{6}x_4 - \frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \end{array} \right\} \\ & \rightarrow \frac{71}{41}x_1 + \frac{26}{41}x_2 = -\frac{177}{41} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_4 + x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 0 & \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}x_4 + x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_4 - \frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \end{array} \right\} \\ & \rightarrow \frac{38}{41}x_1 + \frac{104}{41}x_2 = -\frac{11}{41} \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$-x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2$$

$$-5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3$$

$$-3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -\frac{10}{3}$$

$$-x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{41}{6}x_4 = -\frac{11}{3}$$

$$x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$-\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3}$$

$$\frac{11}{6}x_4 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{10}{3}$$

$$\frac{1}{2}x_4 + x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 0$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$-\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3}$$

$$\frac{71}{41}x_1 + \frac{26}{41}x_2 = -\frac{177}{41}$$

$$\frac{38}{41}x_1 + \frac{104}{41}x_2 = -\frac{11}{41}$$

Ejemplo:

$$3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$-x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2$$

$$-5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3$$

$$-3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -\frac{10}{3}$$

$$-x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{41}{6}x_4 = -\frac{11}{3}$$

$$x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$-\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3}$$

$$\frac{11}{6}x_4 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{10}{3}$$

$$\frac{1}{2}x_4 + x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 0$$

→

$$-6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8$$

$$-\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3}$$

$$\frac{71}{41}x_1 + \frac{26}{41}x_2 = -\frac{177}{41}$$

$$\frac{38}{41}x_1 + \frac{104}{41}x_2 = -\frac{11}{41}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2 \\ -5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3 \\ -3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -\frac{10}{3} \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{41}{6}x_4 = -\frac{11}{3} \\ x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{11}{6}x_4 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{10}{3} \\ \frac{1}{2}x_4 + x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 0 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{71}{41}x_1 + \frac{26}{41}x_2 = -\frac{177}{41} \\ \frac{38}{41}x_1 + \frac{104}{41}x_2 = -\frac{11}{41} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{104}{41}x_2 + \frac{38}{41}x_1 = -\frac{11}{41} \\ \frac{26}{41}x_2 + \frac{71}{41}x_1 = -\frac{177}{41} \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2 \\ -5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3 \\ -3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -\frac{10}{3} \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{41}{6}x_4 = -\frac{11}{3} \\ x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{11}{6}x_4 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{10}{3} \\ \frac{1}{2}x_4 + x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 0 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{71}{41}x_1 + \frac{26}{41}x_2 = -\frac{177}{41} \\ \frac{38}{41}x_1 + \frac{104}{41}x_2 = -\frac{11}{41} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{104}{41}x_2 + \frac{38}{41}x_1 = -\frac{11}{41} \\ \frac{26}{41}x_2 + \frac{71}{41}x_1 = -\frac{177}{41} \end{array}$$

$$\frac{26}{41}x_2 + \frac{71}{41}x_1 = -\frac{177}{41} \rightarrow \left\{ \frac{26}{41}x_2 + \frac{71}{41}x_1 = -\frac{177}{41} \right\}$$

$$-\frac{26}{104} \left\{ \frac{104}{41}x_2 + \frac{38}{41}x_1 = -\frac{11}{41} \right\} \rightarrow \frac{3}{2}x_1 = -\frac{17}{4}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2 \\ -5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3 \\ -3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -\frac{10}{3} \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{41}{6}x_4 = -\frac{11}{3} \\ x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{11}{6}x_4 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{10}{3} \\ \frac{1}{2}x_4 + x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 0 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{71}{41}x_1 + \frac{26}{41}x_2 = -\frac{177}{41} \\ \frac{38}{41}x_1 + \frac{104}{41}x_2 = -\frac{11}{41} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{104}{41}x_2 + \frac{38}{41}x_1 = -\frac{11}{41} \\ \frac{26}{41}x_2 + \frac{71}{41}x_1 = -\frac{177}{41} \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{104}{41}x_2 + \frac{38}{41}x_1 = -\frac{11}{41} \\ \frac{3}{2}x_1 = -\frac{17}{4} \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -x_3 + 2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2 \\ -5x_3 - x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 3 \\ -3x_3 + x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -\frac{10}{3} \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{41}{6}x_4 = -\frac{11}{3} \\ x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{11}{6}x_4 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{10}{3} \\ \frac{1}{2}x_4 + x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 0 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{71}{41}x_1 + \frac{26}{41}x_2 = -\frac{177}{41} \\ \frac{38}{41}x_1 + \frac{104}{41}x_2 = -\frac{11}{41} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{104}{41}x_2 + \frac{38}{41}x_1 = -\frac{11}{41} \\ \frac{26}{41}x_2 + \frac{71}{41}x_1 = -\frac{177}{41} \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} -6x_3 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ -\frac{41}{6}x_4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{11}{3} \\ \frac{104}{41}x_2 + \frac{38}{41}x_1 = -\frac{11}{41} \\ \frac{3}{2}x_1 = -\frac{17}{4} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -\frac{17}{6} \rightarrow x_2 = \frac{145}{156} \rightarrow \\ x_4 = \frac{53}{52} \rightarrow x_3 = -\frac{109}{156} \end{array}$$

Repaso de algunos conceptos.

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} =$$

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14$$

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14 \qquad \det(27) =$$

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14 \qquad \det(27) = 27$$

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14 \qquad \det(27) = 27$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14 \qquad \det(27) = 27$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \cdot 3 \\ - 5 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = -46$$

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14 \qquad \det(27) = 27$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = -46$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14 \qquad \det(27) = 27$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \cdot 3 \\ - 5 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = -46$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ 1 \cdot (-18) - 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 16 = -46$$

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14 \qquad \det(27) = 27$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \cdot 3 \\ - 5 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = -46$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ 1 \cdot (-18) - 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 16 = -46$$

- El determinante de una matriz triangular superior (o inferior) es igual al producto de los elementos de su diagonal.

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14 \qquad \det(27) = 27$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = -46$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-18) - 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 16 = -46$$

- El determinante de una matriz triangular superior (o inferior) es igual al producto de los elementos de su diagonal.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 6 = -12$$

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14 \qquad \det(27) = 27$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \cdot 3 \\ - 5 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = -46$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ 1 \cdot (-18) - 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 16 = -46$$

NO es cierto que el determinante de la suma de matrices sea la suma de determinantes.

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14 \qquad \det(27) = 27$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \cdot 3 \\ - 5 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = -46$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ 1 \cdot (-18) - 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 16 = -46$$

NO es cierto que el determinante de la suma de matrices sea la suma de determinantes.

$$\det \left(\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = -30$$

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = -18 + 3 = -15 \neq -30$$

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14 \qquad \det(27) = 27$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \cdot 3 \\ - 5 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = -46$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ 1 \cdot (-18) - 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 16 = -46$$

SI es cierto que el determinante del producto de matrices es el producto de determinantes. Ejemplo:

Repaso de algunos conceptos.

Antes de continuar, debemos recordar como se calcula el determinante de una matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14 \qquad \det(27) = 27$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = -46$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-18) - 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 16 = -46$$

SI es cierto que el determinante del producto de matrices es el producto de determinantes. Ejemplo:

$$\det \left(\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} -6 + 6 & -10 + 12 \\ 9 + 18 & 15 + 36 \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 27 & 51 \end{pmatrix} = -54 = (-18)3 = \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Recordemos también que los **menores principales** de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

son

Recordemos también que los **menores principales** de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

son

$$\det(a_{11}), \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \dots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Factorización en el método de Gauss:

Nuestro sistema original lo podemos escribir en forma matricial:

$$\begin{array}{r}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
\vdots \\
x_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_1 \\
b_2 \\
\vdots \\
b_n
\end{pmatrix}$$

o bien, $Ax = b$, en donde

$$A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}, \quad
b = \begin{pmatrix}
b_1 \\
b_2 \\
\vdots \\
b_n
\end{pmatrix}, \quad
x = \begin{pmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
\vdots \\
x_n
\end{pmatrix}$$

Supongamos ahora que podemos aplicar el método de Gauss sin tener que reordenar las ecuaciones. Denotemos por

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

la matriz original del sistema. Tras cada reducción vamos obteniendo las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n2}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Esta última matriz es la triangular superior que queríamos obtener.

Puede demostrarse que si definimos las matrices

$$U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{n3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & \cdots & \frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} & 1 \\ \frac{a_{11}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{22}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{33}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & \cdots & \frac{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} & 1 \end{pmatrix}$$

Puede demostrarse que si definimos las matrices

$$U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad L =$$

entonces se verifica la igualdad

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{n3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & \cdots & \frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} & 1 \\ \frac{a_{11}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{22}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{33}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & \cdots & \frac{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} & 1 \end{pmatrix}$$

Puede demostrarse que si definimos las matrices

$$U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad L =$$

entonces se verifica la igualdad

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{n3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & \cdots & \frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} & 1 \\ \frac{a_{11}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{22}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{33}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & \cdots & \frac{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} & 1 \end{pmatrix}$$

- U es la matriz resultante de aplicar el método de Gauss.
- Cada columna de L se obtiene a partir de la columna correspondiente de las etapas anteriores.)

En el primer ejemplo que vimos consideramos el sistema

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10$$

$$\text{Es decir, } \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

En el primer ejemplo que vimos consideramos el sistema

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10$$

Es decir,
$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Las matrices que fuimos obteniendo fueron

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{23}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

Con lo que las matrices U y L son:

Las matrices que fuimos obteniendo fueron

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{23}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

Con lo que las matrices U y L son:

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix},$$

Las matrices que fuimos obteniendo fueron

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{23}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

Con lo que las matrices U y L son:

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{\frac{11}{5}}{\frac{-41}{5}} & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices que fuimos obteniendo fueron

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{23}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

Con lo que las matrices U y L son:

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{\frac{11}{5}}{\frac{-41}{5}} & 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que, efectivamente, se verifica la igualdad:

$$LU = A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Las matrices que fuimos obteniendo fueron

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{23}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

Aplicaciones de la factorización $A = LU$: ¿Y para que sirve esto?

Aplicaciones de la factorización $A = LU$: ¿Y para que sirve esto?

1) Cálculo de determinantes:

De la igualdad $A = LU$ se sigue que $\det(A) = \det(L) \det(U)$. Pero como L y U son triangulares, se tiene que

$$\det(L) = l_{11} \cdot l_{22} \cdots l_{nn}, \quad \det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn},$$

con lo que: $\det(A) = l_{11} \cdot l_{22} \cdots l_{nn} \cdot u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn}$

Aplicaciones de la factorización $A = LU$: ¿Y para que sirve esto?

1) Cálculo de determinantes:

De la igualdad $A = LU$ se sigue que $\det(A) = \det(L) \det(U)$. Pero como L y U son triangulares, se tiene que

$$\det(L) = l_{11} \cdot l_{22} \cdots l_{nn}, \quad \det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn},$$

con lo que: $\det(A) = l_{11} \cdot l_{22} \cdots l_{nn} \cdot u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn}$

En nuestro ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\det(A) = 5 \cdot \left(\frac{-41}{5}\right) \cdot \frac{171}{41} = -171$.

Aplicaciones de la factorización $A = LU$: ¿Y para que sirve esto?

1) Cálculo de determinantes:

De la igualdad $A = LU$ se sigue que $\det(A) = \det(L) \det(U)$. Pero como L y U son triangulares, se tiene que

$$\det(L) = l_{11} \cdot l_{22} \cdots l_{nn}, \quad \det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn},$$

con lo que: $\det(A) = l_{11} \cdot l_{22} \cdots l_{nn} \cdot u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn}$

En nuestro ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\det(A) = 5 \cdot \left(\frac{-41}{5}\right) \cdot \frac{171}{41} = -171$.

(Obsérvese que esto muestra que si U es la matriz resultante de aplicar el método de Gauss a la matriz A , entonces $\det(A) = \det(U)$.)

Aplicaciones de la factorización $A = LU$: ¿Y para que sirve esto?

2) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Supongamos que queremos resolver el sistema cuadrado $Ax = b$, y que hemos conseguido factorizar A como $A = LU$. Si x e y son las soluciones de los sistemas triangulares

$$Ly = b, \quad Ux = y$$

entonces x es la solución de $Ax = b$, pues $Ax = L(Ux) = Ly = b$.

Aplicaciones de la factorización $A = LU$: ¿Y para que sirve esto?

2) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Supongamos que queremos resolver el sistema cuadrado $Ax = b$, y que hemos conseguido factorizar A como $A = LU$. Si x e y son las soluciones de los sistemas triangulares

$$Ly = b, \quad Ux = y$$

entonces x es la solución de $Ax = b$, pues $Ax = L(Ux) = Ly = b$.

Ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \\ A & x & b \end{array}$$

Aplicaciones de la factorización $A = LU$: ¿Y para que sirve esto?

2) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Supongamos que queremos resolver el sistema cuadrado $Ax = b$, y que hemos conseguido factorizar A como $A = LU$. Si x e y son las soluciones de los sistemas triangulares

$$Ly = b, \quad Ux = y$$

entonces x es la solución de $Ax = b$, pues $Ax = L(Ux) = Ly = b$.

Ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 &= 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 10 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

$A \qquad \qquad \qquad L \qquad \qquad \qquad U$

Resolvemos $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Aplicaciones de la factorización $A = LU$: ¿Y para que sirve esto?

2) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Supongamos que queremos resolver el sistema cuadrado $Ax = b$, y que hemos conseguido factorizar A como $A = LU$. Si x e y son las soluciones de los sistemas triangulares

$$Ly = b, \quad Ux = y$$

entonces x es la solución de $Ax = b$, pues $Ax = L(Ux) = Ly = b$.

Ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix} \\ A & & L \qquad U \end{array}$$

Resolvemos $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{187}{41} \end{pmatrix}$$

Aplicaciones de la factorización $A = LU$: ¿Y para que sirve esto?

2) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Supongamos que queremos resolver el sistema cuadrado $Ax = b$, y que hemos conseguido factorizar A como $A = LU$. Si x e y son las soluciones de los sistemas triangulares

$$Ly = b, \quad Ux = y$$

entonces x es la solución de $Ax = b$, pues $Ax = L(Ux) = Ly = b$.

Ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 &= 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 10 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

$A \qquad L \qquad U$

Resolvemos $Ux = y$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{187}{41} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{187}{41} \end{pmatrix}$$

Aplicaciones de la factorización $A = LU$: ¿Y para que sirve esto?

2) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Supongamos que queremos resolver el sistema cuadrado $Ax = b$, y que hemos conseguido factorizar A como $A = LU$. Si x e y son las soluciones de los sistemas triangulares

$$Ly = b, \quad Ux = y$$

entonces x es la solución de $Ax = b$, pues $Ax = L(Ux) = Ly = b$.

Ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 &= 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 10 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix}$$

A L U

Resolvemos $Ux = y$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{187}{41} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{9} \\ \frac{-49}{171} \\ \frac{187}{171} \end{pmatrix} \text{ que es la solución del primer sistema.}$$

Obsérvese que si la factorización $A = LU$ se ha obtenido aplicando el método de Gauss, entonces la solución y de $Ly = b$ ya la hemos calculado durante la aplicación del proceso, pues no es más que el vector independiente que se obtiene en la última reducción. Por ejemplo, cuando al aplicar el método de Gauss pasamos del sistema

$$Ax = b: \begin{array}{l} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{array} \quad \text{al sistema} \quad \begin{array}{l} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 14 \\ -\frac{41}{5}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = \frac{3}{5} \\ \frac{171}{41}x_3 = \frac{187}{41} \end{array}$$

y construimos las matrices

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & -\frac{41}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{11}{41} & 1 \end{pmatrix}$$

entonces la solución de $Ly = b$ es $y = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{187}{41} \end{pmatrix}$ con lo que solo hemos tenido

que resolver $Ux = y$.

A continuación vamos a ver que la factorización $A = LU$ se puede calcular directamente. Pero no toda matriz A admite una factorización de esa forma. Observemos, no obstante, el siguiente resultado:

A continuación vamos a ver que la factorización $A = LU$ se puede calcular directamente. Pero no toda matriz A admite una factorización de esa forma. Observemos, no obstante, el siguiente resultado:

Teorema: Si todos los menores principales de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

son no nulos, entonces existe una única matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$, con $l_{ii} = 1$ para $i = 1, \dots, n$, y una única matriz triangular superior $U = (u_{ij})$ tales que $A = LU$, es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

El teorema anterior nos da una condición suficiente, pero no necesaria, para que exista factorización $A = LU$. Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ que no verifica las hipótesis del teorema pues $\det(A) = 0$, la podemos escribir como $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo.

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}, \text{ tales que } LU = A. \text{ Es}$$

decir, queremos que se verifique la igualdad:

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}, \text{ tales que } LU = A. \text{ Es}$$

decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}, \text{ tales que } LU = A. \text{ Es}$$

decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de la matriz de la izquierda con los de la derecha, y yendo de izquierda a derecha y de arriba abajo, podemos calcular todos los términos de L y U :

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}, \text{ tales que } LU = A. \text{ Es}$$

decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$u_{11} = 5, u_{12} = 7, u_{13} = 6,$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}, \text{ tales que } LU = A. \text{ Es}$$

decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$
$$u_{11} = 5, u_{12} = 7, u_{13} = 6, \quad l_{21}u_{11} = 3 \rightarrow l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = \frac{3}{5}$$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}, \text{ tales que } LU = A. \text{ Es}$$

decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$u_{11} = 5, u_{12} = 7, u_{13} = 6, \quad l_{21}u_{11} = 3 \rightarrow l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = \frac{3}{5}$$

$$l_{21}u_{12} + u_{22} = -4 \rightarrow u_{22} = -4 - l_{21}u_{12} = -4 - \frac{3}{5}7 = \frac{-41}{5}$$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}, \text{ tales que } LU = A. \text{ Es}$$

decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$u_{11} = 5, u_{12} = 7, u_{13} = 6, \quad l_{21}u_{11} = 3 \rightarrow l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = \frac{3}{5}$$

$$l_{21}u_{12} + u_{22} = -4 \rightarrow u_{22} = -4 - l_{21}u_{12} = -4 - \frac{3}{5}7 = \frac{-41}{5}$$

$$l_{21}u_{13} + u_{23} = 2 \rightarrow u_{23} = 2 - l_{21}u_{13} = 2 - \frac{3}{5}6 = \frac{-8}{5}$$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}, \text{ tales que } LU = A. \text{ Es}$$

decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$u_{11} = 5, u_{12} = 7, u_{13} = 6, \quad l_{21}u_{11} = 3 \rightarrow l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = \frac{3}{5}$$

$$l_{21}u_{12} + u_{22} = -4 \rightarrow u_{22} = -4 - l_{21}u_{12} = -4 - \frac{3}{5}7 = \frac{-41}{5}$$

$$l_{21}u_{13} + u_{23} = 2 \rightarrow u_{23} = 2 - l_{21}u_{13} = 2 - \frac{3}{5}6 = \frac{-8}{5}$$

$$l_{31}u_{11} = 2 \rightarrow l_{31} = \frac{2}{u_{11}} = \frac{2}{5},$$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}, \text{ tales que } LU = A. \text{ Es}$$

decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$u_{11} = 5, u_{12} = 7, u_{13} = 6, \quad l_{21}u_{11} = 3 \rightarrow l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = \frac{3}{5}$$

$$l_{21}u_{12} + u_{22} = -4 \rightarrow u_{22} = -4 - l_{21}u_{12} = -4 - \frac{3}{5}7 = \frac{-41}{5}$$

$$l_{21}u_{13} + u_{23} = 2 \rightarrow u_{23} = 2 - l_{21}u_{13} = 2 - \frac{3}{5}6 = \frac{-8}{5}$$

$$l_{31}u_{11} = 2 \rightarrow l_{31} = \frac{2}{u_{11}} = \frac{2}{5}, \quad l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 5 \rightarrow l_{32} = \frac{5 - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{-11}{41}$$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}, \text{ tales que } LU = A. \text{ Es}$$

decir, queremos que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$u_{11} = 5, u_{12} = 7, u_{13} = 6, \quad l_{21}u_{11} = 3 \rightarrow l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = \frac{3}{5}$$

$$l_{21}u_{12} + u_{22} = -4 \rightarrow u_{22} = -4 - l_{21}u_{12} = -4 - \frac{3}{5}7 = \frac{-41}{5}$$

$$l_{21}u_{13} + u_{23} = 2 \rightarrow u_{23} = 2 - l_{21}u_{13} = 2 - \frac{3}{5}6 = \frac{-8}{5}$$

$$l_{31}u_{11} = 2 \rightarrow l_{31} = \frac{2}{u_{11}} = \frac{2}{5}, \quad l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 5 \rightarrow l_{32} = \frac{5 - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{-11}{41}$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 7 \rightarrow u_{33} = 7 - l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} = \frac{171}{41}$$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Hemos calculado así las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix},$$

$$u_{11} = 5, \quad u_{12} = 7, \quad u_{13} = 6, \quad l_{21}u_{11} = 3 \rightarrow l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = \frac{3}{5}$$

$$l_{21}u_{12} + u_{22} = -4 \rightarrow u_{22} = -4 - l_{21}u_{12} = -4 - \frac{3}{5}7 = \frac{-41}{5}$$

$$l_{21}u_{13} + u_{23} = 2 \rightarrow u_{23} = 2 - l_{21}u_{13} = 2 - \frac{3}{5}6 = \frac{-8}{5}$$

$$l_{31}u_{11} = 2 \rightarrow l_{31} = \frac{2}{u_{11}} = \frac{2}{5}, \quad l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 5 \rightarrow l_{32} = \frac{5 - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{-11}{41}$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 7 \rightarrow u_{33} = 7 - l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} = \frac{171}{41}$$

Vamos a ver a continuación, en el caso de que sea posible, como se calculan L y U a partir de A con un ejemplo. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Hemos calculado así las matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-41}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix},$$

que es la descomposición que obtuvimos anteriormente.

Ya sabemos (Teorema) que el que todos los menores principales de A sean no nulos, es una condición **suficiente** para que se pueda descomponer la matriz como $A = LU$. Ya vimos con un ejemplo que esa condición puede no ser necesaria. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ se descompone como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ya sabemos (Teorema) que el que todos los menores principales de A sean no nulos, es una condición **suficiente** para que se pueda descomponer la matriz como $A = LU$. Ya vimos con un ejemplo que esa condición puede no ser necesaria. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ se descompone como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sin embargo, si no se verifican las hipótesis del teorema, puede ser que no exista descomposición $A = LU$. Por ejemplo, no existen matrices L y U tales que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{21} \end{pmatrix}$,

Ya sabemos (Teorema) que el que todos los menores principales de A sean no nulos, es una condición **suficiente** para que se pueda descomponer la matriz como $A = LU$. Ya vimos con un ejemplo que esa condición puede no ser necesaria. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ se descompone como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sin embargo, si no se verifican las hipótesis del teorema, puede ser que no exista descomposición $A = LU$. Por ejemplo, no existen matrices L y U tales que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{21} \end{pmatrix}$, pues, por una parte tendría que ser $u_{11} = 0$, y por otra $l_{21}u_{11} = 1$.

La descomposición que hemos obtenido de la matriz A como $A = LU$, en donde L es triangular inferior con diagonal de unos y U es triangular superior, se denomina descomposición de Doolittle. Si es U la matriz que tiene unos en la diagonal, la descomposición se llama de Crout.

La descomposición que hemos obtenido de la matriz A como $A = LU$, en donde L es triangular inferior con diagonal de unos y U es triangular superior, se denomina descomposición de Doolittle. Si es U la matriz que tiene unos en la diagonal, la descomposición se llama de Crout. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-11}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & \frac{-11}{41} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{171}{41} \end{pmatrix} \quad (\text{Doolittle})$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{-41}{5} & 0 \\ 2 & \frac{11}{5} & \frac{171}{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{41} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Crout})$$

La descomposición que hemos obtenido de la matriz A como $A = LU$, en donde L es triangular inferior con diagonal de unos y U es triangular superior, se denomina descomposición de Doolittle. Si es U la matriz que tiene unos en la diagonal, la descomposición se llama de Crout.

En general, a la hora de obtener una descomposición $A = LU$, podemos fijar para cada i el valor de l_{ij} o de u_{ij} (pero no de ambos a la vez).

La descomposición que hemos obtenido de la matriz A como $A = LU$, en donde L es triangular inferior con diagonal de unos y U es triangular superior, se denomina descomposición de Doolittle. Si es U la matriz que tiene unos en la diagonal, la descomposición se llama de Crout.

En general, a la hora de obtener una descomposición $A = LU$, podemos fijar para cada i el valor de l_{ij} o de u_{ij} (pero no de ambos a la vez). Por ejemplo, podemos fijar los valores $u_{11} = 7$, $l_{22} = -2$, $u_{33} = 3$, y (resolviendo las ecuaciones correspondientes) obtener la descomposición

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & 0 & 0 \\ \frac{3}{7} & -2 & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{22}{41} & \frac{57}{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & \frac{49}{5} & \frac{42}{5} \\ 0 & \frac{41}{10} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La descomposición que hemos obtenido de la matriz A como $A = LU$, en donde L es triangular inferior con diagonal de unos y U es triangular superior, se denomina descomposición de Doolittle. Si es U la matriz que tiene unos en la diagonal, la descomposición se llama de Crout.

En general, a la hora de obtener una descomposición $A = LU$, podemos fijar para cada i el valor de l_{ij} o de u_{ij} (pero no de ambos a la vez). Por ejemplo, podemos fijar los valores $u_{11} = 7$, $l_{22} = -2$, $u_{33} = 3$, y (resolviendo las ecuaciones correspondientes) obtener la descomposición

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & 0 & 0 \\ \frac{3}{7} & -2 & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{22}{41} & \frac{57}{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & \frac{49}{5} & \frac{42}{5} \\ 0 & \frac{41}{10} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que con la descomposición anterior también podríamos resolver el sistema $Ax = b$ mediante la resolución de los dos sistemas $Ly = b$, $Ux = y$. Igualmente, con esta descomposición también podemos calcular fácilmente el determinante de A . En este caso, sabíamos que $\det(A) = -171$, y lo podemos calcular como

$$\det(L)\det(U) = \left[\frac{5}{7} \quad (-2) \quad \frac{57}{41} \right] \left[7 \quad \frac{41}{10} \quad 3 \right]$$

Método de Choleski: Recuérdese que el que una matriz A sea definida positiva significa que $x^t Ax > 0$ para todo vector $x \neq 0$, es decir

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0 \quad \text{si} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y que esto es equivalente a que todos los menores principales de la matriz sean positivos.

Método de Choleski: Recuérdese que el que una matriz A sea definida positiva significa que $x^t Ax > 0$ para todo vector $x \neq 0$, es decir

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0 \quad \text{si} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y que esto es equivalente a que todos los menores principales de la matriz sean positivos. En el caso de que la matriz A sea simétrica y definida positiva, entonces un proceso similar al visto anteriormente permite descomponer A como $A = LL^t$, siendo L una matriz triangular inferior con los elementos de la diagonal positivos.

Método de Choleski: Recuérdese que el que una matriz A sea definida positiva significa que $x^t Ax > 0$ para todo vector $x \neq 0$, es decir

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0 \quad \text{si} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y que esto es equivalente a que todos los menores principales de la matriz sean positivos. En el caso de que la matriz A sea simétrica y definida positiva, entonces un proceso similar al visto anteriormente permite descomponer A como $A = LL^t$, siendo L una matriz triangular inferior con los elementos de la diagonal positivos. Es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

es simétrica y definida positiva pues

$$a_{11} = 8 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} = 87 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 58 > 0$$

Ejemplo: La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

es simétrica y definida positiva pues

$$a_{11} = 8 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} = 87 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 58 > 0$$

Ejemplo: La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

es simétrica y definida positiva pues

$$a_{11} = 8 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} = 87 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 58 > 0$$

Planteando las ecuaciones que se siguen de la igualdad

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

es simétrica y definida positiva pues

$$a_{11} = 8 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} = 87 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 58 > 0$$

Planteando las ecuaciones que se siguen de la igualdad

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

se obtiene que

$$L = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{87}}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

es simétrica y definida positiva pues

$$a_{11} = 8 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} = 87 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 58 > 0$$

Planteando las ecuaciones que se siguen de la igualdad

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

se obtiene que

$$L = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{87}}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\text{Obsérvese que } \det A = (\det L)(\det L^t) = (\det L)^2 = \left(2\sqrt{2} \frac{\sqrt{87}}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 58.$$