Cálculo I
Tema 1
Funciones de una variable: Álgebra de funciones

Índice

Álgebra de funciones

Las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir, ...
Si $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = x$, entonces

$$(f \pm g)(x) = \text{sen}(x) \pm x$$
$$(f \cdot g)(x) = \text{sen}(x) \cdot x$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

¿Dónde están definidas las funciones anteriores? Para la suma, resta y multiplicación, donde ambas lo estén. El dominio del cociente de dos funciones será:

$$\text{Dom}(f/g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \cap \{x \in \text{Dom}(g) \colon g(x) \neq 0\}.$$

Álgebra de funciones

Ejemplos

Calcular el dominio de las siguientes funciones:

$$\sqrt{x} + x, \quad x \log(x), \quad \frac{\sqrt{x} + e^x}{\cos(x)}.$$

Composición de funciones

Si tomamos dos funciones f, g, entonces la composición de funciones

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

es una función definida siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ estén definidas.
Por ejemplo, si

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x - 1.$$

entonces

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = \sqrt{x-1}.$$

Como $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$, $f \circ g$ está definida en todos los puntos x tales que $g(x) \geq 0$.

Álgebra de funciones

Ejemplos

Calcular el dominio de las siguientes funciones:

$$\sqrt{x^2 - x}, \quad \log(x^2), \quad \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Función inversa

Recordemos que las funciones exponencial y logaritmo son una inversa de la otra, pues $e^{\ln x} = \ln e^{x} = x$.

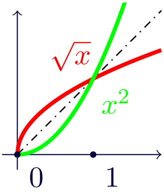
Cuando dos funciones f, g verifican que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, entonces decimos que g es la inversa de f (y que f es la inversa de g).

Por ejemplo, si consideramos $f(x) = x^2$ definida en $x \geq 0$ y $g(x) = \sqrt{x}$, entonces

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x.$$

Función inversa

¿Cómo son las gráficas de las funciones inversas? Si (x, y) es un punto de la gráfica de f, $y = f(x)$. Si g es la inversa, entonces $g(y) = x$, es decir, **si** (x, y) **está en la gráfica de** f**, entonces** (y, x) **está en la gráfica de su inversa.**



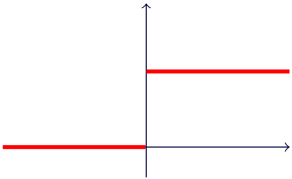
En particular, las gráficas de la función y de su inversa son **inyectivas**.

Funciones definidas a trozos

Otra forma habitual de definir las funciones es dividiendo el dominio en trozos y definiendo la función en cada uno de ellos.

Un ejemplo de este tipo de funciones es la función escalón de Heaviside:

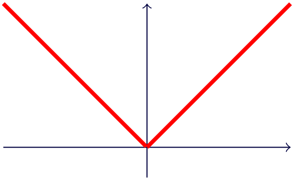
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$



Funciones definidas a trozos

Otro ejemplo es la función valor absoluto, $f(x) = |x|$, que se define como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$



Nota: la función $|x|$ también se puede obtener como $f(x) = \sqrt{x^2}$ (esbozar la gráfica).

Funciones definidas a trozos

Ejemplo

Escribir como funciones a trozos, obtener su dominio y esbozar la gráfica de las siguientes funciones

$$f(x) = |x^2 - 1|, \quad f(x) = 1 + \frac{|x|}{x}, \quad f(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$