- Límite de una función en un punto. Se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

  si cuanto más se aproxima x al punto a, más se aproxima $f(x)$ a b.
- **En lenguaje formal, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - b| < \epsilon$.**
- Se supone que f está definida en un intervalo centrado en a, aunque posiblemente no esté definida en a.
- El valor de la función en el punto a no importa; incluso puede ser que la función no esté definida en ese punto y en cambio exista el límite.

Por ejemplo, para las tres funciones

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 7 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ \text{no definida} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

se tiene $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Límites laterales

- Límite por la derecha de una función en un punto. Se dice que
$$\lim_{x \to a+} f(x) = b,$$
si cuanto más se aproxima x por la derecha al punto a, más se aproxima $f(x)$ a b.
- Límite por la izquierda de una función en un punto. Se dice que
$$\lim_{x \to a-} f(x) = b,$$
si cuanto más se aproxima x por la izquierda al punto a, más se aproxima $f(x)$ a b.

Límites laterales

- La función
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in (-1,0) \\ 1 & \text{si } x \in (0,1) \end{cases}$$
cumple
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = 1.$$
- Existe el $\lim_{x\to a} f(x) = b$ si y solo si existen los límites laterales y toman el mismo valor b, es decir si y solo si
$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = b.$$

Límites laterales infinitos

- Se dice que
$$\lim_{x\to a\pm} f(x) = +\infty,$$
si cuanto más se aproxima x por la derecha (resp. izquierda) al punto a, $f(x)$ toma valores mayores que cualquier numero prefijado.
- Se dice que
$$\lim_{x\to a\pm} f(x) = -\infty,$$
si cuanto más se aproxima x por la derecha (resp. izquierda) al punto a, $f(x)$ toma valores menores que cualquier numero prefijado.

Límites laterales infinitos

- Si $\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = +\infty$, se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- $\ldots$
- En todos los casos anteriores se dice que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$.

Límites laterales en el infinito

- Se dice que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b,$$
si cuanto mayor es x, $f(x)$ más se aproxima a b.
- Se dice que
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b,$$
si cuanto menor es x, $f(x)$ más se aproxima a b.
- Se dice que la gráfica de $f(x)$ tiene la asíntota horizontal $y = b$.
- De manera análoga se definen $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Álgebra de límites

- Generalmente el cálculo de límites no es fácil, pero se facilita con los resultados siguientes que relacionan el límite con las operaciones de suma, multiplicación y división de funciones.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$, entonces

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = b + c$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = bc$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}, \qquad \text{si } c \neq 0$$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = b^c, \qquad \text{si todo está bien definido}$$

Si alguno de los límites sea infinito, se cumple:

$$a \pm \infty = \pm\infty$$

$$\frac{a}{0} = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 0, \\ -\infty \text{ si } a < 0. \end{cases}$$

$$\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$$

$$\infty(\pm\infty) = \pm\infty$$

$$a^{\infty} = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 1, \\ 0 \text{ si } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$\infty a = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 0, \\ -\infty \text{ si } a < 0. \end{cases}$$

$$\infty^{a} = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 0, \\ 0 \text{ si } a < 0. \end{cases}$$

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

Cálculo de límites: Indeterminaciones

- Indeterminación $\infty - \infty$.
- Indeterminación $0 \cdot \infty$.
- Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.
- Indeterminación $\frac{0}{0}$.
- Indeterminación 1^{∞}.
- Indeterminación 0^{0}.
- Indeterminación ∞^{0}.