Cálculo I
Tema 1
1-04. Continuidad de funciones de una variable. El teorema de Bolzano

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Continuidad de una función en un punto

- Una función f es continua en a si está definida en ese punto, es decir, existe el valor $f(a)$, si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y ambos valores coinciden. Se suele escribir todo en una sola línea:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Continuidad de una función en un punto

- Una función f es continua en a si está definida en ese punto, es decir, existe el valor $f(a)$, si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y ambos valores coinciden. Se suele escribir todo en una sola línea:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

- Una función f es continua en a por la derecha si está definida en ese punto, es decir, existe el valor $f(a)$, si existe $\lim_{x\to a+} f(x)$ y ambos valores coinciden. Se suele escribir todo en una sola línea:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a).$$

Continuidad de una función en un punto

- Una función f es continua en a si está definida en ese punto, es decir, existe el valor $f(a)$, si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y ambos valores coinciden. Se suele escribir todo en una sola línea:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

- Una función f es continua en a por la derecha si está definida en ese punto, es decir, existe el valor $f(a)$, si existe $\lim_{x\to a+} f(x)$ y ambos valores coinciden. Se suele escribir todo en una sola línea:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a).$$

- Una función f es continua en a por la izquierda si ...

Continuidad de una función en un punto

- Una función f es continua en a si está definida en ese punto, es decir, existe el valor $f(a)$, si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y ambos valores coinciden. Se suele escribir todo en una sola línea:
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$
- Una función f es continua en a por la derecha si está definida en ese punto, es decir, existe el valor $f(a)$, si existe $\lim_{x\to a+} f(x)$ y ambos valores coinciden. Se suele escribir todo en una sola línea:
$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a).$$
- Una función f es continua en a por la izquierda si ...
- Una función es continua en a si y solo si es continua en a por la derecha y por la izquierda simultáneamente.

Funciones continuas y cálculo de límites

- Si se conoce que f es continua en a el cálculo de

  $$\lim_{x\to a} f(x)$$

  es inmediato, ya que es igual a $f(a)$.

Funciones continuas y cálculo de límites

- Si se conoce que f es continua en a el cálculo de

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

  es inmediato, ya que es igual a $f(a)$.
- El problema está pues en el cálculo de $\lim_{x \to a} f(x)$ en el caso en que f no es continua en a.

Ejemplos

- La función
$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$
es continua en todos los puntos $x \neq 0$. Así que para todos ellos el cálculo del límite es muy fácil
$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{\operatorname{sen}(a)}{a}$$
si $a \neq 0$. El único caso que no se ha calculado es para $a = 0$.

Ejemplos

- La función
$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$
es continua en todos los puntos $x \neq 0$. Así que para todos ellos el cálculo del límite es muy fácil
$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{\operatorname{sen}(a)}{a}$$
si $a \neq 0$. El único caso que no se ha calculado es para $a = 0$.
- Este ejemplo muestra la importancia de conocer qué funciones son continuas y qué reglas nos permiten decidir si una función es continua o no.

Ejemplos

- Por ejemplo, es conveniente conocer reglas para decidir rápidamente si expresiones como

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\cos(x)}{2-\operatorname{sen}(x)}$$

son o no continuas; o mejor aún, en qué puntos lo son y en qué puntos no.

Ejemplos

- Por ejemplo, es conveniente conocer reglas para decidir rápidamente si expresiones como

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\cos(x)}{2-\operatorname{sen}(x)}$$

  son o no continuas; o mejor aún, en qué puntos lo son y en qué puntos no.
- Por este motivo se suelen estudiar la continuidad de las funciones más simples (llamadas elementales) y después las operaciones que mantienen la continuidad de las funciones involucradas, como la suma entre ellas o la composición.

Continuidad de las funciones elementales

Todas las funciones elementales (polinomiales, potencias, logaritmo, exponencial y trigonométricas) vistas en el tema anterior son continuas en todo su dominio.

Entonces, usando la continuidad y el álgebra de límites, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\cos(x)}{2-\operatorname{sen}(x)} &= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 0}(x^2+x+1)}+\lim_{x\to 0}\cos(x)}{2-\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(x)}\\ &= \frac{\sqrt{1}+\cos(0)}{2-\operatorname{sen}(0)}=1.\end{aligned}$$

El álgebra de las funciones continuas

Si f y g son funciones continuas, entonces

- $f + g$ es continua

El álgebra de las funciones continuas

Si f y g son funciones continuas, entonces

- $f + g$ es continua
- $f - g$ es continua

El álgebra de las funciones continuas

Si f y g son funciones continuas, entonces

- $f + g$ es continua
- $f - g$ es continua
- $f \cdot g$ es continua

El álgebra de las funciones continuas

Si f y g son funciones continuas, entonces

- $f + g$ es continua
- $f - g$ es continua
- $f \cdot g$ es continua
- f/g es continua en todos los puntos en los que ambas lo son y el denominador no se anula

El álgebra de las funciones continuas

Si f y g son funciones continuas, entonces

- $f+g$ es continua
- $f-g$ es continua
- $f \cdot g$ es continua
- f/g es continua en todos los puntos en los que ambas lo son y el denominador no se anula
- $f \circ g$ es continua

El álgebra de las funciones continuas

Estas propiedades permiten decidir rápidamente si expresiones como

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 + e^x}{\cos(x) + 2}}$$

son o no continuas. En este caso:

- la función constante 1 y la función exponencial e^x son continuas, luego su suma $1 + e^x$ lo es.

El álgebra de las funciones continuas

Estas propiedades permiten decidir rápidamente si expresiones como

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+e^x}{\cos(x)+2}}$$

son o no continuas. En este caso:

- la función constante 1 y la función exponencial e^x son continuas, luego su suma $1+e^x$ lo es.
- la función $\cos(x)$ y la función constante 2 son continuas, luego $\cos(x)+2$ es continua.

El álgebra de las funciones continuas

- la función
$$h(x) = \frac{1 + e^x}{\cos(x) + 2}$$
es continua en todos los puntos en los que no se anule el denominador. Como este denominador no se anula en ningún punto, la función $h(x)$ es continua.

El álgebra de las funciones continuas

- la función
$$h(x) = \frac{1 + e^x}{\cos(x) + 2}$$
es continua en todos los puntos en los que no se anule el denominador. Como este denominador no se anula en ningún punto, la función $h(x)$ es continua.
- la función raíz $g(x) = \sqrt{x}$ es continua y está definida para $x \geq 0$

El álgebra de las funciones continuas

- la función
$$h(x) = \frac{1+e^x}{\cos(x)+2}$$
es continua en todos los puntos en los que no se anule el denominador. Como este denominador no se anula en ningún punto, la función $h(x)$ es continua.
- la función raíz $g(x) = \sqrt{x}$ es continua y está definida para $x \geq 0$
- como $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \sqrt{\frac{1+e^x}{\cos(x)+2}}$ la función f es continua para los valores en los que $h(x) \geq 0$, lo que ocurre para cualquier valor, ya que $1 + e^x$ y $\cos(x) + 2$ son funciones positivas.

El álgebra de las funciones continuas

- la función
$$h(x) = \frac{1+e^x}{\cos(x)+2}$$
es continua en todos los puntos en los que no se anule el denominador. Como este denominador no se anula en ningún punto, la función $h(x)$ es continua.
- la función raíz $g(x) = \sqrt{x}$ es continua y está definida para $x \geq 0$
- como $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \sqrt{\frac{1+e^x}{\cos(x)+2}}$ la función f es continua para los valores en los que $h(x) \geq 0$, lo que ocurre para cualquier valor, ya que $1+e^x$ y $\cos(x)+2$ son funciones positivas.
- En resumen, $f(x)$ está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$.

Teorema de Bolzano

- Las funciones continuas tienen varias propiedades. Una de ellas, ya vista, es que evitan el cálculo de límites, ya que para ellas sólo hay que sustituir el valor de la función en el punto límite.

Teorema de Bolzano

- Las funciones continuas tienen varias propiedades. Una de ellas, ya vista, es que evitan el cálculo de límites, ya que para ellas sólo hay que sustituir el valor de la función en el punto límite.
- Otra propiedad es el

Teorema (Bolzano)

Si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en todos los puntos de $[a, b]$ y si $f(a)f(b) < 0$ (es la forma abreviada para escribir que la función cambia de signo entre a y b) , entonces existe un valor $c \in (a, b)$ que cumple $f(c) = 0$.

Teorema de Bolzano

En este teorema es esencial que la función sea continua y que se trate de un intervalo, como muestran las funciones siguientes:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Cambia de signo, no es continua y está definida en un intervalo. No alcanza el valor 0.

Teorema de Bolzano

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in (3,4) \\ 1 & \text{si } x \in (6,9) \end{cases}$$

Cambia de signo, es continua pero no está definida en un intervalo. No alcanza el valor cero.

Ejemplo y aplicación del teorema de Bolzano

Resolver la ecuación $xe^x = 1$.

- Esta ecuación puede escribirse como $xe^x - 1 = 0$, y llamando $f(x) = xe^x - 1$ se trata de ver si hay valores que cumplan $f(x) = 0$.

Ejemplo y aplicación del teorema de Bolzano

Resolver la ecuación $xe^x = 1$.

- Esta ecuación puede escribirse como $xe^x - 1 = 0$, y llamando $f(x) = xe^x - 1$ se trata de ver si hay valores que cumplan $f(x) = 0$.
- Para ello, según el teorema de Bolzano, basta comprobar que la función es continua y que cambia de signo. En cada cambio de signo se halla un valor que cumple $f(x) = 0$.

Ejemplo y aplicación del teorema de Bolzano

Resolver la ecuación $xe^x = 1$.

- Esta ecuación puede escribirse como $xe^x - 1 = 0$, y llamando $f(x) = xe^x - 1$ se trata de ver si hay valores que cumplan $f(x) = 0$.
- Para ello, según el teorema de Bolzano, basta comprobar que la función es continua y que cambia de signo. En cada cambio de signo se halla un valor que cumple $f(x) = 0$.
- La función es continua pues se trata del producto de x por e^x al que luego se le resta 1 (este razonamiento pone de manifiesto la necesidad de conocer qué funciones son continuas y las reglas que permiten decidir de forma rápida si una expresión es o no una función continua).

Ejemplo y aplicación del teorema de Bolzano

- Como $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$ el teorema de Bolzano dice que existe un valor $c \in (0, 1)$ que cumple $f(c) = 0$. Así $c = 0, ...$ Si se elige como raiz aproximada el 0, se comete un error menor que $1 - 0 = 1$.

Ejemplo y aplicación del teorema de Bolzano

- Como $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$ el teorema de Bolzano dice que existe un valor $c \in (0,1)$ que cumple $f(c) = 0$. Así $c = 0, \ldots.$ Si se elige como raiz aproximada el 0, se comete un error menor que $1 - 0 = 1$.
- Para aproximarnos a c se divide el intervalo por la mitad, es decir, se consideran los intervalos $(0, 0{,}5)$ y $(0{,}5, 1)$. Se calcula el signo de la función en 0,5 y se elige el subintervalo donde la función cambia de signo.

Ejemplo y aplicación del teorema de Bolzano

- Como $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$ el teorema de Bolzano dice que existe un valor $c \in (0,1)$ que cumple $f(c) = 0$. Así $c = 0, \ldots.$ Si se elige como raiz aproximada el 0, se comete un error menor que $1 - 0 = 1$.
- Para aproximarnos a c se divide el intervalo por la mitad, es decir, se consideran los intervalos $(0, 0{,}5)$ y $(0{,}5, 1)$. Se calcula el signo de la función en 0,5 y se elige el subintervalo donde la función cambia de signo.
- Como $f(0{,}5) = -0{,}17 < 0 \ldots$, se elige el intervalo $(0{,}5, 1)$. El Teorema de Bolzano garantiza que en este intervalo hay al menos un cero $c = 0{,}5 \ldots$. Si se elige como raiz aproximada el número 0,5 cometemos un error menor que $(1 - 0)/2 = 0{,}5$

Ejemplo y aplicación del teorema de Bolzano

- Se continua el proceso, calculando el signo de $f(x)$ en $x = 0{,}75$. Se obtiene que $f(0{,}75) = 0{,}58\cdots > 0$. Por tanto, hay al menos una raíz en el intervalo $(0{,}5, 0{,}75)$. Si se elige como raiz aproximada el número 0,5 cometemos un error menor que $(1-0)/2^2 = 0{,}25$

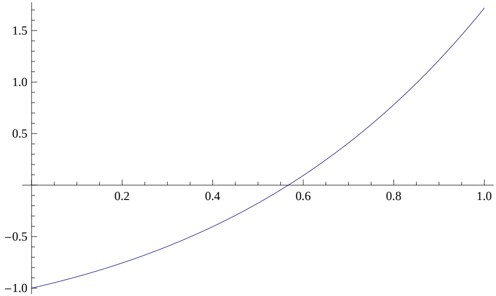
Ejemplo y aplicación del teorema de Bolzano

- Se continua el proceso, calculando el signo de $f(x)$ en $x = 0{,}75$. Se obtiene que $f(0{,}75) = 0{,}58\cdots > 0$. Por tanto, hay al menos una raíz en el intervalo $(0{,}5, 0{,}75)$. Si se elige como raiz aproximada el número 0,5 cometemos un error menor que $(1-0)/2^2 = 0{,}25$
- De esta manera nos vamos aproximando a un cero de $f(x)$.

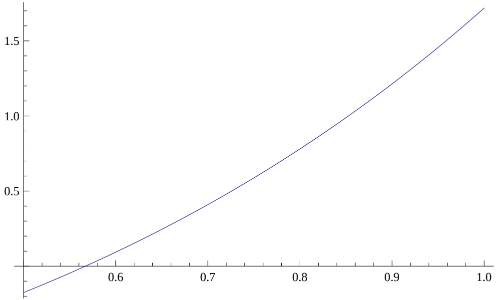
Ejemplo y aplicación del teorema de Bolzano

- Se continua el proceso, calculando el signo de $f(x)$ en $x = 0{,}75$. Se obtiene que $f(0{,}75) = 0{,}58\cdots > 0$. Por tanto, hay al menos una raíz en el intervalo $(0{,}5, 0{,}75)$. Si se elige como raiz aproximada el número 0,5 cometemos un error menor que $(1-0)/2^2 = 0{,}25$
- De esta manera nos vamos aproximando a un cero de $f(x)$.
- En el caso general los errores que se cometen al elegir como solución aproximada el extremo izquierdo del subintervalo elegido son

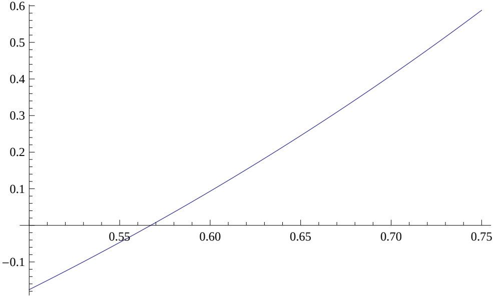
$$b-a, \quad (b-a)/2, \quad (b-a)/2^2, \quad (b-a)/2^3, \ldots$$



$$xe^x - 1 = 0$$



$$xe^x - 1 = 0$$



$$xe^x - 1 = 0$$

Una consecuencia del teorema de Bolzano

Dada una ecuación $f(x) = 0$ (todas las ecuaciones se pueden escribir así) en la que la función que aparece es continua y está definida en un intervalo, se puede

- saber si tiene soluciones

Una consecuencia del teorema de Bolzano

Dada una ecuación $f(x) = 0$ (todas las ecuaciones se pueden escribir así) en la que la función que aparece es continua y está definida en un intervalo, se puede

- saber si tiene soluciones
- calcularlas con la precisión que uno quiera.

Ejemplo

La ecuación $x^3 + 1 = x$ se puede escribir como $f(x) = 0$ donde la función es$f(x) = x^3 - x + 1$. Esta función es continua y está definida en todo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Ejemplo

La ecuación $x^3 + 1 = x$ se puede escribir como $f(x) = 0$ donde la función es$f(x) = x^3 - x + 1$. Esta función es continua y está definida en todo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
Como además $f(-2) < 0$ y $f(-1) > 0$, la ecuación tiene una solución $c = -1, \dots$.

Ejemplo

La ecuación $x^3 + 1 = x$ se puede escribir como $f(x) = 0$ donde la función es$f(x) = x^3 - x + 1$. Esta función es continua y está definida en todo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
Como además $f(-2) < 0$ y $f(-1) > 0$, la ecuación tiene una solución $c = -1, ...$
Reiterando el proceso, como en el ejemplo anterior se obtiene la solución $c = -1,3247...$