Cálculo I
Tema 1
1.6. Puntos extremos

Índice

1. Crecimiento y decrecimiento. Extremos
2. Optimización

Crecimiento y decrecimiento

Supóngase que f está definida en un intervalo (a, b).

- f es **creciente** en el intervalo si para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ se cumple que
$$f(x_1) \leq f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2.$$
- f es **estrictamente creciente** en el intervalo si para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ se cumple que
$$f(x_1) < f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2.$$
- f es **decreciente** en el intervalo si para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ se cumple que
$$f(x_1) \geq f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2.$$
- f es **estrictamente decreciente** en el intervalo si para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ se cumple que
$$f(x_1) > f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2.$$

Crecimiento y decrecimiento

Supongamos que f está definida en un intervalo centrado en x_0.

- f es **creciente** en x_0 si existe un intervalo centrado en x_0 tal que

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{si } x > x_0 \quad \text{y} \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \text{si } x < x_0.$$

- f es **estrictamente creciente** en x_0 si existe un intervalo centrado en x_0 tal que

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{si } x > x_0 \quad \text{y} \quad f(x) < f(x_0) \quad \text{si } x < x_0.$$

Análogamente se define decreciente y estrictamente decreciente.

Crecimiento y decrecimiento

Supóngase que f está definida en un intervalo centrado en x_0.

- Si $f'(x_0) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en x_0, es decir, en un intervalo centrado en x_0,

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{si } x > x_0 \quad \text{y} \quad f(x) < f(x_0) \quad \text{si } x < x_0.$$

- Si $f'(x_0) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en x_0, es decir, en un intervalo centrado en x_0

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{si } x > x_0 \quad \text{y} \quad f(x) > f(x_0) \quad \text{si } x < x_0.$$

Crecimiento y decrecimiento en intervalos

Sea f una función definida en un intervalo. Si para todo x del intervalo

- $f'(x) \geq 0$, entonces f es creciente en el intervalo.
- $f'(x) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo.
- $f'(x) \leq 0$, entonces f es decreciente en el intervalo.
- $f'(x) < 0$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo.
- $f'(x) = 0$, entonces f es constante en el intervalo.

Supóngase que f está definida en un intervalo centrado en x_0.

- Se dice que f tiene un máximo relativo en x_0, si

  $$f(x) \leq f(x_0),$$

  para todo x de un intervalo centrado en x_0.
- Se dice que f tiene un mínimo relativo en x_0, si

  $$f(x) \geq f(x_0),$$

  para todo x de un intervalo centrado en x_0.
- Si f es derivable en x_0 y tiene un máximo o mínimo relativo en el punto x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

Clasificación de los puntos extremos

Supóngase que f está definida en un intervalo centrado en x_0. Sean $f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Entonces

- si n es impar, x_0 es un punto de inflexión.
- si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 es un máximo relativo.
- si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 es un mínimo relativo.
- Se dice que x_0 es un punto extremo, si es un máximo o un mínimo.

Ejemplo

- Sea $f(x) = x^2$. Entonces $f'(x) = 2x = 0$ implica que $x = 0$. Como $f''(0) = 2 > 0$ se trata de un mínimo.
- Sea $f(x) = x^3$. Entonces $f'(x) = 3x^2 = 0$ implica que $x = 0$. Como $f''(x) = 6x$ se anula en ese punto, hay que mirar la siguiente derivada. Como $f'''(0) = 6$ es distinta de cero y tiene índice impar, se trata de un punto de inflexión.

Ejemplo

La función $f(x) = x + 1/x$ tiene como puntos que anulan a la derivada:

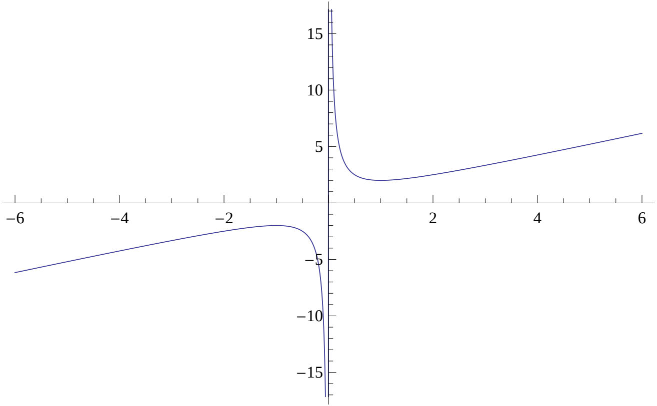
$$\left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0,$$

$x = \pm 1$. Para saber qué es cada uno de ellos hay que ver cómo son las demás derivadas. Como

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)'' = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)' = -\left(-2x^{-3}\right) = \frac{2}{x^3}$$

para $x = 1$ se obtiene un mínimo y para $x = -1$ se obtiene un máximo.

Ejemplo



Cálculo de extremos absolutos

Supóngamos que queremos calcular el máximo y el mínimo de una función f en un intervalo $[a, b]$.

Supondremos que la función f es continua en todo punto de $[a, b]$.

Existe un punto $x_M \in [a, b]$ de modo que el máximo de f en $[a, b]$ es $f(x_M)$. Es decir, el máximo de f en el intervalo $[a, b]$ se "alcanza" en el punto x_M, es decir,

$$f(x) \leq f(x_M) \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Análogamente, existe $x_m \in [a, b]$ tal que el mínimo de f en $[a, b]$ es $f(x_m)$. Es decir, el mínimo de f en el intervalo $[a, b]$ se "alcanza" en el punto x_m, es decir,

$$f(x_m) \leq f(x) \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Cálculo de extremos absolutos

Si la función f es derivable en un intervalo abierto que contenga a $[a, b]$, entonces tenemos las siguientes posibilidades para el máximo (para el mínimo es igual):

1. El máximo es $f(a)$ o $f(b)$.
2. El máximo es $f(x_1)$ con $x_1 \in (a, b)$. En dicho caso, será un máximo relativo y $f'(x_1) = 0$.

Entonces para calcular el máximo y el mínimo de f en un intervalo, basta calcular sus valores en $x = a$, en $x = b$ y en los x tal que $f'(x) = 0$.

Ejemplos

Ejemplo

Calcular el máximo y el mínimo de las siguientes funciones en los siguientes intervalos:

1. $f(x) = x$ *en el intervalo* $[-1, 1]$.
2. $f(x) = x^2 - x$ *en el intervalo* $[0, 2]$.
3. $f(x) = e^{-x^3+x+1}$ *en el intervalo* $[-2, 2]$.

Optimización

A veces se tratan problemas en cuya resolución interviene el cálculo del máximo o el mínimo de alguna función. La principal dificultad consiste en identificar qué función es la que aparece en el problema.

Optimización. Ejemplo

- De todos los rectángulos del mismo perímetro, calcular el que tenga área máxima.
- Rectángulos que tengan un mismo perímetro, por ejemplo 12, hay muchos, y para cada uno de ellos se obtiene un área distinta.
- Si se llama x e y a la base y la altura del rectángulo, para que tenga perímetro 12 se tiene que cumplir $x + y = 6$. El área, que viene dada por $A(x, y) = xy$, es la función de la cual hay que calcular el máximo. Como además se cumple $y = 6 - x$, la función que marca el área se puede escribir como $A(x) = x\,(6 - x)$.
- Para encontrar su máximo se deriva y se iguala a cero: $A'(x) = 6 - 2x = 0$ y la solución es $x = 3$, que es un máximo, ya que $A''(x) = -2 < 0$. El rectángulo de mayor área es el cuadrado.

Optimización. Ejemplo

- Si se trata con rectángulos de cierto perímetro L, entonces los lados cumplen $x + y = L/2$ y el área viene dada por $A(x) = xy = x\,(L/2 - x)$. Al derivar e igualar a cero se obtiene $x = L/4$ y, de nuevo, el rectángulo de mayor área es el cuadrado.

Optimización. Ejemplo

- Calcular cómo deben ser las dimensiones de una lata cilíndrica para que tenga una capacidad de 330cc y sea lo más barata posible (tenga el menor gasto posible en material).
- Para que la capacidad sea de 330cc se tiene que cumplir $\pi r^2 h = 330$ y por tanto, el área, que es la función para la que hay que calcular el mínimo, es

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{330}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2\frac{330}{r}.$$

Optimización. Ejemplo

- Derivando e igualando a cero se tiene

$$A'(r) = 4\pi r - 2\frac{330}{r^2} = 0$$

y así

$$r^3 = 2\frac{330}{4\pi} = \frac{330}{2\pi}$$

y

$$h = \frac{330}{\pi r^2} = 2r = 2 \cdot 3'745 = 7{,}49\ cm.$$

- La solución es un cilindro que tiene de altura lo mismo que el diámetro de la base ($h = 2r$). Es una lata que vista de perfil es un cuadrado.

Optimización. Ejemplo

- Calcular la distancia del punto $(2,0)$ a la parábola $y = x^2$.
- Se trata de encontrar la mínima distancia entre el punto $(2,0)$ y los puntos (x,y) de la parábola. Como estos puntos cumplen $y = x^2$ se trata de calcular el mínimo de las distancias

$$d(x) = dist\left((2,0), (x,x^2)\right) = \sqrt{(2-x)^2 + (0-x^2)^2}$$

y calcular su mínimo.

Optimización. Ejemplo

- Al derivar e igualar a cero se obtiene como solución $x = 0,835122\ldots$
- Así, el punto de la parábola es $(0,835122\ldots\ ,\ 0,697428\ldots)$ y la distancia pedida es $d\left((2,0),(0,835122\ldots\ ,\ 0,697428\ldots)\right) = \sqrt{(2-0,835122\ldots)^2 + 0,697428\ldots^2}\ =\ 1,35769\ldots$