Cálculo I
Tema 1
1.7. Propiedades de las funciones derivables

Índice

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Se dice que f es derivable en el intervalo $[a,b]$, si es derivable en todos los puntos de $[a,b]$. En los extremos se consideran las derivadas laterales, es decir, se supone que existen los límites

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \qquad f'_-(b) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

Teorema de Rolle

Teorema (Rolle)

Si f es derivable en $[a, b]$ y $f(a) = f(b)$, entonces existe $x_0 \in (a, b)$ que cumple $f'(x_0) = 0$.

Teorema del valor medio

Teorema (Del valor medio)

Si f es derivable en $[a,b]$ entonces existe $x_0 \in (a,b)$ que verifica

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Regla de l'Hôpital

Teorema (Regla de l'Hôpital)

Sean f y g son derivables en un intervalo centrado en a. Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

y existe

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

entonces también existe

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y coinciden:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ejemplo

Por ejemplo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

La regla de l'Hôpital también se cumple cuando

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty, \quad a = \pm\infty.$$

La única condición para poder aplicarla a una expresión, es escribirla como un cociente.

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} (e^x - x) = \lim_{x\to\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right).$$

Como, aplicando L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right) = 0,$$

tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} (e^x - x) = +\infty.$$

Polinomio de Taylor

Se llama polinomio de Taylor de grado n de f en el punto x_0 al polinomio en x,

$$
\begin{aligned}
P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\
+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n
\end{aligned}
$$

El polinomio de Taylor aproxima el valor de la función para puntos cercanos a x_0.

Ejemplo

Para $f(x) = e^x$ y el punto $x_0 = 0$ se tiene como polinomio de Taylor

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!}$$