1.7. Ejercicios de propiedades de las funciones derivables

1. Calcular, para cada una de las siguientes funciones,el número y la posición de los ceros.

   (a) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$

   (b) $f(x) = 1 - e^{x^2-3x-1}$

   (c) $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$

   (d) $f(x) = \sin(x) + 1/2$, $x \in [0, 2\pi]$.

   (e) $f(x) = \frac{1}{x^2} - e^{x^2}$

2. Calcular los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x)-1}{\log(x^2)+1}$

   (e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{1-\sin(\pi x)}$

   (f) $\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

   (g) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$

   (h) $\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x$

   (i) $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$

   (j) $\lim_{x\to\infty} x - e^x$

   (k) $\lim_{x\to-\infty} x^2 - e^{-x}$

   (l) $\lim_{x\to 0} \sin x \log x$

   (m) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} - \log x$

   (n) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$

   (o) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$

   (p) $\lim_{x\to 0} \cos^{\sin x} x$

3. Cuando x es grande, ¿qué es mayor, x o $\log x$? ¿y $\sqrt{x}$ ó $\log x$?

4. Para valores de x positivos, ¿qué es mayor, x o $\sin x$?

5. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de las siguientes funciones en el punto indicado.

   (a) $f(x) = \cos x$ en $x = 0$.

   (b) $f(x) = \log x$ en $x = 1$.

   (c) $f(x) = e^x$ en $x = 0$.

   (d) $f(x) = \sin x$ en $x = \pi/2$.

   (e) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$.

   (f) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 0$.

6. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x) = \sin x$ en el origen. ¿Cuánto valen en $x = 1$ la función f y el polinomio de Taylor de grado 3 en el origen?

7. Calcular el polinomio de Taylor de grado 1 de $f(x) = e^x$ en el origen. Calcular también la ecuación de la recta tangente de $f(x) = e^x$ en el origen y comparar ambos resultados.