Cálculo I
2.2. Funciones de varias variables

Introducción

En este tema estudiaremos las funciones de varias variables, en el caso particular de dos variables, es decir, funciones

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Ejemplos

Funciones de dos variables son el paraboloide

$$F(x, y) = x^2 + y^2,$$

ó el hiperboloide reglado

$$F(x, y) = xy + 1.$$

Representación gráfica

Podemos representar una función de dos variables como una superficie en el espacio. Para ello, tomamos muchos puntos (x, y) y para cada uno de ellos representamos en $\mathbb{R}^3$ el punto $(x, y, f(x, y))$. Después, unimos los puntos tales que sus coordenadas (x, y) son próximas para dibujar una superficie.

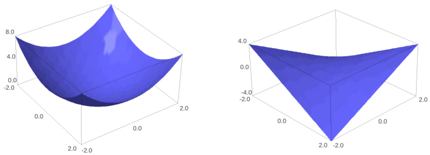

Figura: Paraboloide e hiperboloide

Representación gráfica

Otra forma de respresentar una función de dos dimensiones es mediante sus curvas de nivel. Para ello vamos eligiendo valores $z \in \mathbb{R}$ y para cada uno de ellos, dibujamos la curva plana $f(x, y) = z$.

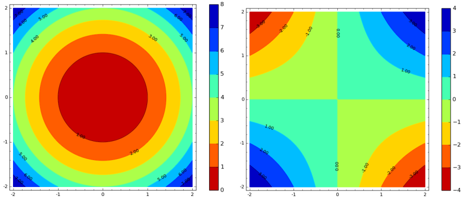

Figura: Paraboloide e hiperboloide

Derivadas parciales

Consideremos una función de dos variables, $f(x, y)$. Se definen las derivadas parciales de f en un punto (x, y) como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}.$$

La derivada parcial de f respecto de x en un punto (x_0, y_0) es la derivada de la función de una variable $f(x, y_0)$ en el punto x_0. Análogamente en y.

Derivadas parciales

Ejemplos

Calcular las derivadas parciales en $(0,0)$ *y en* $(1,1)$ *de las siguientes funciones:*

1. $f(x,y) = x + 1.$
2. $f(x,y) = x^2 + y^2.$
3. $f(x,y) = (x+y)^2.$
4. $f(x,y) = xe^{x^2+xy}.$

Gradiente

Dada una función $f(x,y)$ y un punto (x_0,y_0), el gradiente de f en el punto (x_0,y_0) es

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

Ejemplos

Calcular el gradiente en el origen de las siguientes funciones

1. $f(x,y) = x+1.$
2. $f(x,y) = xy + y + 2x.$
3. $f(x,y) = x^2 + y^2.$
4. $f(x,y) = e^{x+y}.$

Gradiente

El gradiente se representa mediante un vector (flecha), con origen el punto (x_0, y_0) y extremo $(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)$ (usualmente, multiplicando el gradiente por un factor para que el dibujo sea más claro).

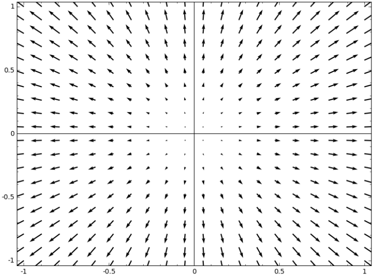

Figura: Gradiente de $x^2 + y^2$

Gradiente

El gradiente determina la dirección de máximo crecimiento de la función. Las curvas de nivel indican las direcciones donde la función no cambian. Las curvas de nivel y el gradiente son perpendiculares.

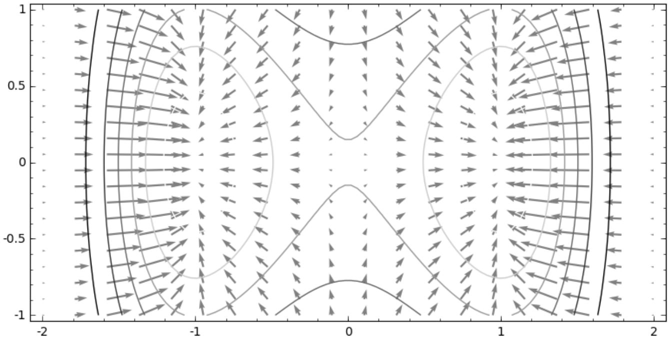

Figura: Gradiente y curvas de nivel ($e^{-\frac{(x^2-1)^2+y^2}{2}}$)

Gradiente

En los extremos de una función de varias variables el gradiente se anula (aunque puede anularse en otros puntos).

Ejemplo

Estudiar dónde se anula el gradiente de $f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + y^2$.