Tema 3. Sistemas diferenciales lineales.

1. Consideramos el sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_3(t), \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) + 2x_3(t), \\ x_3'(t) = 3x_3(t). \end{cases}$$

   a) Determina la matriz de coeficientes A.

   b) Calcula los valores propios de A y los subespacios de vectores propios asociados.

   c) Encuentra un sistema fundamental para el sistema (4.14).

   d) Observamos que la ecuación $x_3'(t) = 3x_3(t)$ se puede resolver explícitamente. Determina las soluciones y escribe el sistema (4.14), con esa información, como un sistema de dimensión 2. ¿De qué tipo es el sistema resultante?

2. Obtener un sistema fundamental de soluciones de

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

3. Resuelva el sistema diferencial lineal

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

   Obtener la solución determinada por $x(0) = y(0) = z(0) = 1$. Representa la solución obtenida.

4. Consideremos el sistema

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

   ¿Cuál es el límite cuando $t \to -\infty$ de las soluciones?

5. Consideremos el sistema

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

   ¿Cuál es el límite cuando $t \to \infty$ de las soluciones?

6. Consideremos el sistema

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

   Obtenemos un sistema fundamental de soluciones.

7. Resuelva el sistema diferencial lineal

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -10 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

   a) Calcular las soluciones constantes.

   b) Encontrar una solución no constante.

   c) Obtener un sistema fundamental de soluciones.

   d) Obtener la solución determinada por $x(1) = y(2) = z(3) = 1$.

8. Resuelva el sistema diferencial lineal

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -4 & -5 & 2 \\ -5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

   a) Encontrar un sistema fundamental de soluciones.

   b) Encontrar una solución cuya órbita no sea una recta y que converja a $(0, 0, 0)$ cuando t converge a infinito.

9. Sea $X(t)$ una función matricial definida en el intervalo I. Si $X(t)$ es derivable y tiene inversa para todo $t \in I$, demuestre que

$$(X^{-1}(t))' = -X^{-1}(t)X'(t)X^{-1}(t).$$

10. Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/t & 0 \\ -1/t^2 & 1/t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

11. ¿De qué forma ha de ser la función $a(t)$, $a\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, para que las funciones

$$x^1(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x^2(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x^3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

sean soluciones linealmente independientes de un sistema de la forma $x' = A(t)x$, $t > 0$, si ha de cumplirse

$$\text{traza}(A(t)) = \frac{4}{t}.$$

Si la cuestión anterior tiene solución, determine el sistema diferencial $x' = A(t)x$.

Si la cuestión anterior tiene solución, resuelva el problema de valor inicial

$$x' = A(t)x + \begin{bmatrix} 1/t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

12. Dar un ejemplo de un sistema diferencial lineal homogéneo $x' = Ax$ de modo que todos los autovalores de la matriz A sean imaginarios puros y que tenga una solución no acotada. ¿Cuál es la dimensión mínima en la que esto puede ocurrir?

13. Resuelva la ecuación diferencial $x'' + x' + x = 0$.

14. Resuelva la ecuación diferencial $x^{3)} - \frac{3}{4}x' - \frac{1}{4}x = 0$.

15. Resuelva la ecuación diferencial $x'' + x = 0$. A partir de sus soluciones, obtener la solución de $x^{3)} + x' = 0$.

16. **Oscilaciones en sistemas mecánicos**

    Cosidérese un pequeño objeto de masa m unido a un muelle elástico de longitud l que está suspendido de un soporte horizontal. Un muelle elástico tienen la propiedad de que si se alarga o acorta una distancia Δl pequeña en relación con l, entonces ejerce una fuerza de restauración de magnitud $k\Delta l$. La constante k mide la rigidez del muelle. Posterioremente se considera que la masa y el muelle están inmersos en un medio que impide el movimiento, por ejemplo aceite.

    Para determinar el movimiento de la masa m es más simple medir el desplazamiento desde la posición de equilibrio del sistema, es decir, desde el punto donde la masa cuelga en reposo cuando no hay fuerzas externas que actúan sobre ella. En el equilibrio, el peso de la masa mg está compensado con la fuerza de restauración del muelle $k\Delta l$. Entonces en la posición de equilibrio el muelle ha sido alargado una distancia Δl de modo que $k\Delta l = mg$.

    Sea $x = 0$ este equilibrio y consideramos positiva la dirección hacia abajo. Sea $x(t)$ la posición de la masa m en el tiempo t. La fuerza que actúa sobre la masa m es la suma de las siguientes cuatro fuerzas:

    - El peso $P = mg$.
    - La fuerza de restauración $R = -k(\Delta l + x(t))$.
    - La fuerza de rozamiento $-cx'(t)$.
    - Las fuerzas externas que actúan sobre la masa m, que se supondrá que dependen del tiempo y que se denotará por $F(t)$.

    De la segunda Ley de Newton del movimiento

    $$mx''(t) = mg - k(\Delta l + x(t)) - cx'(t) + F(t).$$

    Puesto que $k\Delta l = mg$, se llega a

    $$mx''(t) + kx(t) + cx'(t) = F(t).$$

    a) **Caso sin fuerzas externas ni rozamiento**: Supongamos que $F(t) = 0$ y $c = 0$. Obtener las soluciones de la ecuación diferencial:

    $$mx''(t) + kx(t) = 0.$$

    b) 💻 Representar la gráfica de la solución determinada por la condición inicial $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

c) Probar que las soluciones en el caso de que no haya fuerzas externas ni fuerza de rozamiento se pueden escribir en la forma $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$. Esta expresión se denomina **forma polar**, A es la amplitud, ω la frecuencia natural y δ el ángulo de fase.

d) **Caso con rozamiento pero sin fuerzas externas**: Obtener las soluciones cuando $F(t) = 0$ y $c \neq 0$. Determinar el valor del parámetro c que separa:

- El movimiento **sobreamortiguado** (sin oscilaciones, retorno lento al equilibrio).
- Del movimiento **subamortiguado** (oscilaciones amortiguadas).

El movimiento correspondiente a dicho valor se denomina **críticamente amortiguado**. ¿Qué ocurre con la frecuencia de las oscilaciones?

e) **Movimiento periódicamente forzado**: En este caso se supone que una fuerza externa del tipo:

$$F(t) = f_0 \cos(\omega t)$$

actúa sobre la partícula m. Supondremos que $c = 0$, $k/m = 1$, $f_0/m = 1$. Entonces la ecuación del movimiento es:

$$x'' + x = \cos(\omega t).$$

1) Calcular las soluciones cuando $\omega = 2$ mediante coeficientes inderminados.

2) Calcular las soluciones cuando $\omega = 1$ mediante variación de constantes. ¿Para qué condiciones iniciales la amplitud de las oscilaciones es creciente en el tiempo? Este fenómeno se denomina **resonancia**.

17. Sea una ecuación diferencial escalar de segundo orden $x'' = f(t, x, x')$ para la que se cumple la unicidad de soluciones del problema de valor inicial. Demuestre que las gráficas de dos soluciones distintas no pueden ser tangentes en ningún punto.

    Supóngase además que f es continua y que una solución de la ecuación diferencial, $x\colon I \to \mathbb{R}$, tiene infinitos ceros en el intervalo compacto $[a, b] \subset I$. Demuestre que $x(t) = 0$ para todo $t \in I$.

18. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, siendo $a(t)$ y $b(t)$ funciones continuas en el intervalo I. Pruebe que el conjunto de soluciones es un subespacio vectorial 2-dimensional de $C^2(I, \mathbb{R})$. Sea $c(t)$ continua en I. Demuestre que el conjunto de soluciones de $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ es un subespacio afín 2-dimensional de $C^2(I, \mathbb{R})$.

19. Demuestre que la ecuación diferencial $x'' + ax' + bx = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$ tiene una solución de la forma

$$x(t) = \begin{cases} C_0 + C_1 t \cdots + C_n t^n, & \text{si } b \neq 0 \\ t(C_0 + C_1 t \cdots + C_n t^n), & \text{si } b = 0, a \neq 0 \\ t^2(C_0 + C_1 t \cdots + C_n t^n), & \text{si } b = 0, a = 0 \end{cases}$$

20. Resuelva la ecuación diferencial $x'' + x' + x = t^2$.

21. Demuestre que $x(t)$ es solución de la ecuación diferencial $x'' + ax' + bx = e^{\lambda t}(c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n)$ si y solo si $u(t) = e^{-\lambda t} x(t)$ es solución de la ecuación diferencial $u'' + (2\lambda + a)u' + (\lambda^2 + a\lambda + b)u = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$.

    Entonces demuestre que la ecuación diferencial de partida tiene una solución de la forma

$$x(t) = \begin{cases} e^{t\lambda}(C_0 + C_1 t \cdots + C_n t^n), & \text{si } \lambda^2 + a\lambda + b \neq 0 \\ t(C_0 + C_1 t \cdots + C_n t^n), & \text{si } \lambda^2 + a\lambda + b \neq 0, 2\lambda + a = 0 \\ t^2(C_0 + C_1 t \cdots + C_n t^n), & \text{si } \lambda^2 + a\lambda + b = 0, 2\lambda + a = 0 \end{cases}$$

22. Resuelva las ecuaciones diferenciales

$$x'' + x = \sin(2t), \qquad x'' + 4x = \sin(2t).$$

23. Resuelva la ecuación diferencial

$$x'' + 2x' + x = te^{(1+i)t},$$

    donde i es la unidad imaginaria compleja.

24. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, siendo $a(t)$ y $b(t)$ funciones continuas en el intervalo I. Demuestre que los ceros de esas soluciones son distintos y se presentan de forma alternativa. Es decir, $x_1(t)$ se anula exactamente una vez entre cualesquiera dos ceros de $x_2(t)$ y viceversa.

25. Demuestre que cualquier ecuación diferencial de la forma $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, se puede transformar mediante un cambio de variables en una ecuación de la forma $y'' + q(t)y = 0$.

26. Sea la ecuación diferencial $x'' + q(t)x = 0$, donde $q(t)$ es continua en el intervalo I y donde $q(t) < 0$ para todo $t \in I$. Demuestre que cualquier solución no trivial de la ecuación diferencial tiene a lo sumo un cero.

27. Sea la ecuación diferencial $x'' + q(t)x = 0$, donde $q(t)$ es continua en el intervalo $(0, \infty)$, donde $q(t) > 0$ para todo $t \in (0, \infty)$ y donde

$$\int_1^\infty q(t)\, dt = \infty.$$

    Demuestre que si $x(t)$ es una solución no trivial, entonces tiene un número infinito de ceros.

28. Sean $u(t), v(t)$ soluciones no triviales de

$$u'' + q(t)u = 0, \qquad v'' + r(t)v = 0,$$

    respectivamente. Se supone que $q(t) > r(t) > 0$ son funciones continuas en el intervalo I. Demuestre que $u(t)$ se anula al menos una vez entre cada dos ceros consecutivos de $v(t)$.