Grado en Matemáticas / Doble Grado en Matemáticas y Estadística

Ecuaciones Diferenciales

Tema 3. Sistemas y ecuaciones diferenciales lineales.

José Luis Bravo

Curso 2025/2026

Índice

Definición

Una **ecuación diferencial lineal de orden** n es una ecuación diferencial de la forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)x = b(t),$$

donde $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_{n-1}(t), b(t)$ son funciones con dominio en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y con valores reales (o complejos).

Definición

Un **sistema de ecuaciones diferenciales lineales de dimensión** n es un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{1,n}x_n(t) + b_1(t), \\ x_2'(t) = a_{2,1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{2,n}x_n(t) + b_2(t), \\ \ldots \\ x_n'(t) = a_{n,1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{n,n}x_n(t) + b_n(t), \end{cases}$$

En forma matricial

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t),$$

donde $A\colon I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $b\colon I \to \mathbb{K}^n$.

Proposición

La ecuación diferencial lineal de orden n

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)x = b(t),$$

es equivalente al sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & x_2 \\ \vdots & & \\ x_{n-1}' & = & x_n \\ x_n' & = & -a_0(t)x_1 - \cdots - a_{n-1}x_n + b(t) \end{array}\right.$$

Es decir, si $x(t)$ es solución de la ecuación lineal entonces $(x(t), x'(t), \ldots, x^{n-1)}(t))$ es solución el sistema y si $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ es solución del sistema, entonces $x_1(t)$ es solución de la ecuación.

Ejemplo

Consideremos la ecuación del oscilador armónico forzado con rozamiento:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t),$$

donde m es la masa del objeto, k la constance de elasticidad del muelle, c la constante de rozamiento y F la fuerza externa.

Obtener el sistema lineal equivalente.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Si $\|x\|$ es una norma en $\mathbb{K}^n$, se define la norma matricial asociada como

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

La aplicación $\|A\|$ es una norma en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que verifica:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|,$$
$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|,$$

donde $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $x \in \mathbb{K}^n$.

En el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ consideraremos la topología inducida por la norma anterior.

Proposición

Sea la función

$$t \in I \to A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Se verifica:

1. *Sean* $A_k, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $k = 1, 2, \ldots$ *Entonces* $A_k \to A$, $k \to \infty$ *si y solo si* $a_{ij}^k \to a_{ij}$, $k \to \infty$ *para todos* i, j.
2. $A(t)$ *es continua si y solo si* $a_{ij}(t)$ *es continua para todos* i, j, *donde* $A(t) = [a_{ij}(t)]$.
3. $A(t)$ *es derivable si y solo si* $a_{ij}(t)$ *es derivable para todos* i, j. *Además*
$$A'(t) = [a'_{ij}(t)].$$
4. $A(t)$ *es integrable si y solo si* $a_{ij}(t)$ *es integrable para todos* i, j. *Además*
$$\int A(t)\,dt = \left[\int a_{ij}(t)\,dt\right].$$

El problema de valor inicial

Teorema

Sean $A\colon I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $b\colon I \to \mathbb{K}^n$ funciones continuas en el intervalo I. Entonces para cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ existe una única solución, definida en todo I, del problema de valor inicial

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \qquad x(t_0) = x_0.$$

A partir de ahora $A(t), b(t)$ serán funciones continuas en un intervalo y todas las soluciones las supondremos maximales.

Estructura algebraica

Teorema

Sea $A\colon I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *continua. Entonces el conjunto de soluciones de* $x'(t) = A(t)x(t)$ *es un espacio vectorial.*

Proposición

Sean $x^1(t), \dots, x^k(t)$ *soluciones del sistema* $x'(t) = A(t)x(t)$*. Es equivalente*

1. $x^1(t), \dots, x^k(t)$ *son linealmente independientes,*
2. *existe* $t_0 \in I$ *tal que los vectores* $x^1(t_0), \dots, x^k(t_0)$ *son linealmente independientes,*
3. *para todo* $t_0 \in I$ *los vectores* $x^1(t_0), \dots, x^k(t_0)$ *son linealmente independientes.*

Teorema

Sea $A\colon I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *continua. Entonces el conjunto de soluciones de* $x'(t) = A(t)x(t)$ *es un espacio vectorial n-dimensional y el conjunto de soluciones de* $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ *es un espacio afín n-dimensional.*

Consideremos ahora el sistema lineal homogéneo, es decir,

$$x'(t) = A(t)x(t),$$

donde $A\colon I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es continua.

Definición

Denominaremos **sistema fundamental** a n soluciones linealmente independientes.

Si $x_1, \ldots, x_n$ son soluciones linealmente independientes, entonces sabemos que $x(t)$ es solución si y sólo si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \ldots + \alpha_n x_n(t).$$

Wronskiano

Definición

Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{K}$ y $F_1, \ldots, F_n : I \to \mathbb{K}^n$, $F_i = (F_{i1}, \ldots, F_{in})$ para $i = 1, \ldots, n$, se define su **Wronskiano** como:

$$W(F_1, \ldots, F_n)(t) = \begin{vmatrix} F_{11}(t) & \ldots & F_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(t) & \ldots & F_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Proposición

Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $F_1, \ldots, F_n : I \to \mathbb{R}^n$ tales que existe $t \in I$ tal que $W(F_1, \ldots, F_n)(t) \neq 0$. Entonces $F_1, \ldots, F_n$ son linealmente independientes.

Ejemplo

Demuestra que las dos soluciones

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ t \end{pmatrix} e^t \quad \text{y} \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

del sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t)$$

son linealmente independientes y por tanto forman una base del espacio de soluciones del sistema.

Fórmula de Abel-Jacobi-Liouville

Proposición

Sean $t \in I \to A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *continuas,* $X_1, \ldots, X_n$ *soluciones del sistema* $x' = A(t)x$ *y* $W(t) := W(X_1, \ldots, X_n)(t)$*. Entonces para todos* $t_0, t \in I$*,*

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{traza} A(s)\, ds \right).$$

donde $\operatorname{traza} A(s)$ *es la traza de la matriz* $A(s)$*.*

Corolario

En las condiciones anteriores, si $X_1, \ldots, X_n$ *son soluciones de* $x' = A(t)x$*, entonces el Wronskiano de* $X_1, \ldots, X_n$ *o bien es identicamente cero o bien siempre es distinto de cero.*

Definición

Dadas n soluciones $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ del sistema

$$x'(t) = A(t)x(t),$$

llamamos *matriz solución* a la matriz que se construye por columnas con las n soluciones:

$$\Phi : I \to \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad \Phi(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ X_1(t) & \ldots & X_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Si el determinante de $\Phi(t)$ es distinto de cero para todo $t \in I$, entonces llamamos a $\Phi(t)$ *matriz fundamental* y el conjunto $\{X_1, \ldots, X_N\}$ es un *sistema fundamental* de soluciones del sistema.

Sistemas autónomos

El sistema $x'(t) = Ax(t)$ es un caso particular de sistema diferencial autónomo, cuya forma general es

$$x'(t) = f(x(t)),$$

donde $f\colon U \to \mathbb{R}^n$.

Supongamos que hay existencia y unicidad de soluciones para el problema de valor inicial de la ecuación anterior.

Proposición

Si $x(t)$ es solución de $x'(t) = f(x(t))$ y t_0 pertenece a su intervalo de defnición, entonces $x(t + t_0)$ también es solución.

Sistemas autónomos

Definición

Denominaremos *órbita* de una solución $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ su imagen, es decir, al conjunto

$$\operatorname{orb}(x) = \{x(t)\colon t \in I\}.$$

Proposición

Si u, v son dos soluciones de $x'(t) = f(x(t))$, entonces $\operatorname{orb}(u) = \operatorname{orb}(v)$ ó $\operatorname{orb}(u) \cap \operatorname{orb}(v) = \varnothing$.

Proposición

Por cada $x_0 \in U$ pasa una única órbita maximal de $x'(t) = f(x(t))$.

Sistemas autónomos

Definición

Llamaremos *retrato de fases* al conjunto de órbitas.

Definición

Un punto $x_0 \in U$ es un *punto de equilibrio* de $x' = f(x)$ si $f(x_0) = 0$.

Es fácil comprobar que x_0 es un equilibrio si y solo si $x(t) \equiv x_0$ es solución de $x' = f(x)$.

El sistema $x'(t) = Ax(t)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, es autónomo con $f(x) = Ax$. Para encontrar todas sus soluciones se determinará una solución matricial fundamental.

Teorema

Si λ es un autovalor de A y p un autovector asociado, entonces

$$e^{t\lambda} p$$

es solución de $x'(t) = Ax(t)$. Además, si $p^1, \ldots, p^n$ es una base de autovectores con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivamente, entonces

$$e^{t\lambda_1} p^1, \ldots, e^{t\lambda_n} p^n$$

es una base de soluciones de $x'(t) = Ax(t)$.

Dos autovalores reales distintos

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son los autovalores y p_1, p_2 son sus autovectores asociados, entonces $p_1 e^{\lambda_1 t}, p_2 e^{\lambda_2 t}$ son soluciones linealmente independientes.

Ejemplo

Calcular un sistema fundamental de la ecuación

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x(t).$$

Describir el retrato de fases.

La exponencial compleja

Definición

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Se define la exponencial compleja de λ como el número complejo

$$e^{\lambda} = e^{a+bi} = e^{a}\left(\cos(b) + \operatorname{sen}(b)i\right)$$

Proposición

Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = a + bi$, y definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como $f(x) = e^{\lambda x}$, entonces $f'(x) = \lambda f(x)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} f'(x) =& a e^{ax}\left(\cos(bx) + \operatorname{sen}(bx)i\right) + e^{ax}\left(-b\sin(bx) + b\cos(bx)i\right) \\ =&(a+bi)e^{ax}\left(\cos(bx) + \operatorname{sen}(bx)i\right) = \lambda f(x). \end{aligned}$$

$\square$

Dos autovalores complejos conjugados

Si $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ son los autovalores y p_1, p_2 son sus autovectores asociados, entonces $p_1 e^{\lambda t}, p_2 e^{\bar{\lambda} t}$ son soluciones linealmente independientes (complejas).

Proposición

Si $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ son los autovalores de A, entonces la parte real e imaginaria de una solución compleja son soluciones reales linealmente independientes de $x' = Ax$.

Ejemplo

Calcular un sistema fundamental de la ecuación

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

Describir el retrato de fases.

Un autovalor real doble. Caso diagonalizable.

Si λ es un autovalor doble y p_1, p_2 son autovectores asociados linealmente independientes, entonces $p_1 e^{\lambda t}, p_2 e^{\lambda t}$ son soluciones linealmente independientes.

Ejemplo

Calcular un sistema fundamental de la ecuación

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

Describir el retrato de fases.

Un autovalor real doble. Caso no diagonalizable

Si λ es un autovalor doble y p_1 es un autovector asociado, entonces $p_1 e^{\lambda t}$ es una solución. Necesitamos encontrar una segunda solución. Nótese que mediante un cambio de variable lineal el sistema siempre se puede escribir en la forma

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} x(t)$$

Ejemplo

Calcular un sistema fundamental de la ecuación

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x(t).$$

Describir el retrato de fases.

Ejemplo

Calcular un sistema fundamental de la ecuación

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

Para ello, considerar la solución correspondiente a un autovector y una segunda solución de la forma

$$x(t) = v_1 t e^{\lambda t} + v_2 e^{\lambda t},$$

donde λ es el autovalor de la matriz asociada a la ecuación.

Estabilidad

Consideremos el sistema diferencial lineal $x' = Ax$.

Definición

Decimos que el sistema lineal es *estable* si toda solución $x(t)$ está acotada para $t \geq 0$.

Decimos que es *inestable* si no es estable.

Definición

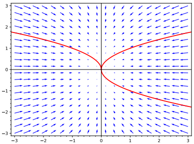
Decimos que el sistema lineal es *asintóticamente estable* si para toda solución $x(t)$,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Clasificación sistemas lineales planos

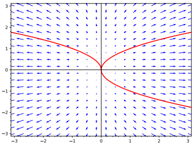
Nodo estable

$\lambda_1 < 0, \ \lambda_2 < 0$



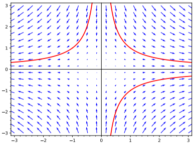
Nodo inestable

$\lambda_1 > 0, \ \lambda_2 > 0$



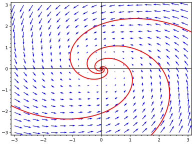
Silla

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$



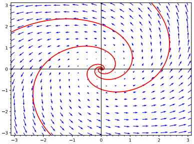
Foco estable

$\Re(\lambda) < 0, \ \Im(\lambda) \neq 0$



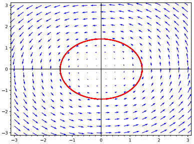
Foco inestable

$\Re(\lambda) > 0, \ \Im(\lambda) \neq 0$



Centro

$\Re(\lambda) = 0, \ \Im(\lambda) \neq 0$



Clasificación sistemas lineales planos

Ejercicio

La clasificación anterior contiene todos los casos en los que la matriz del campo tiene dos autovalores distintos y no nulos. Completar la clasificación con los casos restantes:

1. Un autovalor doble no nulo y matriz invertible (nodo propio).
2. Un autovalor doble no nulo y matriz no invertible (nodo degenerado).
3. Un autovalor no nulo y el autovalor cero.
4. Autovalor cero doble.

Proposición

Sean $A, B, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tales que P es invertible y $PA = BP$. Entonces $x(t)$ es solución de

$$x' = Ax$$

si y sólo si $y(t) = Px(t)$ es solución de

$$y' = By.$$

Matriz de Jordan

Recordemos que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tiene autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ con λ_i de multiplicidad m_i, la matriz es equivalente a

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix} \quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_i & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{m_i \times m_i}$$

Dicha matriz se denomina **matriz de Jordan** y a las submatrices A_i se les llama **cajas de Jordan**.

Matriz de Jordan

Ejercicio

Obtener el cambio de coordenadas que da la equivalencia entre la siguiente matriz y su matriz de Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Coeficientes constantes

Consideremos el sistema lineal

$$x' = Ax,$$

donde A es una matriz de Jordan. Nótese que para obtener un sistema fundamental de soluciones es suficiente obtener un sistema fundamental de soluciones para los sistemas

$$x' = A_i x, \quad 1 \leq i \leq k,$$

donde $A_1, \ldots, A_n$ son las cajas de Jordan de A.

Proposición

Una matriz fundamental de

$$x'(t) = A_i x(t),$$

donde A_i es el bloque de Jordan correspondiente al autovalor λ_i de multiplicidad m_i es

$$\Phi_i(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ te^{\lambda_i t} & e^{\lambda_i t} & \ddots & & \vdots \\ \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & e^{\lambda_i t} & 0 \\ \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!}e^{\lambda_i t} & \frac{t^{m_i-2}}{(m_i-2)!}e^{\lambda_i t} & \dots & te^{\lambda_i t} & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Obtener una matriz fundamental de $x' = Ax$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Obtener la solución determinada por las condiciones iniciales $x(0) = (1, 2, 3)$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y λ es un autovalor complejo, entonces el bloque de Jordan correspondiente al par de autovalores $\lambda, \bar{\lambda} = a \pm bi$, de multiplicidad m, es

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix}} & & & \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix}} \end{pmatrix}_{2m\times 2m}$$

Proposición

Una matriz fundamental de $x'(t) = Ax(t)$, donde A es la caja correspondiente a los autovalores $\lambda, \bar{\lambda} = a \pm bi$, de multiplicidad m, es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} R & 0 & \dots & \dots & 0 \\ tR & R & \ddots & & \vdots \\ \frac{t^2}{2!}R & tR & R & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}R & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}R & \dots & tR & R \end{pmatrix},$$

donde

$$R = e^{at}\begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}.$$

Coeficientes constantes

Ejemplo

Obtener una matriz fundamental de $x' = Ax$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema

Si $X(t)$ es una matriz fundamental del problema de valor inicial

$$X' = AX, \quad X(0) = I,$$

(X es una matriz fundamental y $X(0) = I$), entonces

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

siendo la convergencia de la serie uniforme en cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$.

La exponencial matricial

Definición

Denominamos *exponencial matricial* de una matriz $At \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Proposición

Sea $X(t)$ la matriz fundamental de $x' = Ax$ tal que $X(0) = I$. Entonces

$$X(t+s) = X(t)X(s),$$
$$X^{-1}(t) = X(-t).$$

Como consecuencia

$$e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}, \quad \left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}.$$

Proposición

Sen $A, B, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que P es invertible y $AP = PB$. Entonces

$$e^{At}P = Pe^{Bt}.$$

Proposición

Sen $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Ejercicio

Calcular e^{At}, donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ejercicio

Supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix},$$

donde $A_1, \dots, A_n$ son matrices cuadradas. Probar que

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{A_n t} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Calcular e^{At}, donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

La exponencial matricial

Ejemplo

Calcular e^{At} donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio

Calcular e^{At} donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sistemas no homogéneos

Consideremos ahora el problema de encontrar soluciones del sistema lineal no homogéneo,

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t),$$

donde $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $b(t) \in \mathbb{K}^n$ son continuos en su intervalo de definición I.

Nótese que estamos en las hipótesis del Teorema de Picard-Lindelöf, luego para cada tenemos asegurada la existencia y unicidad de soluciones (maximales) del PVI.

Por otro lado, probamos que el espacio de soluciones es un espacio afín de dimensión n, así pues, basta calcular una solución particular x_p y sumar las soluciones de la ecuación homogénea $x' = A(t)x$.

Sistemas no homogéneos

Proposición

Sean $x_1, x_2 \colon I \to \mathbb{R}^n$ *soluciones respectivas de*

$$x' = A(t)x + f_1(t), \quad x' = A(t)x + f_2(t).$$

Entonces $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ *es solución de*

$$x' = A(t)x + (f_1(t) + f_2(t)).$$

Método de los coeficientes indeterminados

Consiste en fijar una base de funciones $f_1, \ldots, f_k$ y buscar la solución particular en $\mathrm{span}(f_1, \ldots, f_k)$. Es decir, calcular los coeficientes $c_1, \ldots, c_k$ para que $c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$ sea solución.

Ejemplo

Consideremos el sistema lineal

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 2t - 2 \\ -4t \end{pmatrix}.$$

Calcular una solución particular de la forma

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix}.$$

Obtener todas las soluciones.

Método de los coeficientes indeterminados

Si el término independiente es polinomial, se puede encontrar una solución polinomial.

En caso de ser combinación lineal de una función exponencial $e^{\lambda t}$ se busca una solución cuyas componentes sean de la forma $p(t)e^{\lambda t}$, donde p son polinomios de grado igual a la multiplicidad de λ como autovalor de la matriz del sistema homogéneo.

Ejemplo

Consideremos el sistema lineal

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtener todas las soluciones.

Si es de la forma $x' = Ax + b(t)$ y $b(t)$ es combinación lineal de $e^{\lambda t}\operatorname{sen}(\omega t)$, $e^{\lambda t}\cos(\omega t)$, se busca una solución cuyas componentes sean de la forma $p(t)e^{\lambda t}(\alpha \operatorname{sen}(\omega t) + \beta \cos(\omega t))$, donde p son polinomios de grado igual a la multiplicidad de $\lambda + i\omega$ como autovalor de la matriz del sistema homogéneo.

Ejercicio

Consideremos el sistema lineal

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} e^t \operatorname{sen}(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtener todas las soluciones.

Consideremos ahora el problema de encontrar soluciones del sistema lineal no homogéneo,

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t),$$

donde $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $b(t) \in \mathbb{K}^n$ son continuos en su intervalo de definición I.

Supongamos conocida una matriz fundamental, Φ, de soluciones de la ecuación homogénea $x' = A(t)x$. El método de variación de constantes consiste en buscar una matriz fundamental del sistema lineal no homogéneo en la forma

$$X_p(t) = \Phi(t)C(t)$$

Método de los coeficientes indeterminados

Teorema

Si $\Phi(t)$ es una solución matricial fundamental de $X' = A(t)X$, las soluciones de $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ son, fijado $\tau \in I$,

$$x(t) = \Phi(t)C + \Phi(t)\int_{\tau}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,ds, \quad t \in I,\ C \in \mathbb{K}^n.$$

Ejemplo

Calcular las soluciones del sistema:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix},$$

cuya matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

Método de los coeficientes indeterminados

Teorema

Si $\Phi(t)$ es una solución matricial fundamental de $X' = A(t)X$, la solución del PVI

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0$$

es

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,ds, \quad t \in I.$$

Ejercicio

Calcular las soluciones del PVI

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} \frac{-29}{100} \\ \frac{2}{25} \end{pmatrix}.$$