

Máster Universitario en Formación del Profesorado en Secundaria

Contenidos interactivos: Geogebra

Innovación docente e investigación

José Luis Bravo

Curso 2020/2021



Introducción

- Herramientas para desarrollar contenidos interactivos
- Geometría Euclídea

Geogebra - Geometría plana

- Introducción
- Construcciones elementales
- Modificar el aspecto
- Dibujos interactivos



Lenguajes de Programación

- ▶ Lenguajes de propósito general (Java, Visual Basic, etc)
- ▶ Scratch (<https://scratch.mit.edu/>)
- ▶ MIT App Inventor (<http://appinventor.mit.edu/explore/>)



Software Matematico

- ▶ Wolfram Alpha
- ▶ Geogebra
- ▶ Sage
- ▶ Mathematica
- ▶ Maxima
- ▶ ...



Para crear contenidos interactivos de Matemáticas:

- ▶ Wolfram demonstrations
- ▶ Jupyter Interact
- ▶ Script Geogebra



¿Y por qué crearlos cuando hay muchos ya disponibles?

- ▶ <https://demonstrations.wolfram.com/>
- ▶ <https://www.geogebra.org/materials>
- ▶ <https://www.geogebra.org/m/gP4um8bW>
- ▶ <https://wiki.sagemath.org/interact/>
- ▶ <https://play.google.com/store/search?q=matematicas>



Postulados de Euclides

1. Dos puntos cualquiera determinan un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela

A partir de estos postulados, Euclides demostraba proposiciones que forman el cuerpo de la geometría euclídea:

http://newton.matem.unam.mx/geometria/menulibro_m.html



Proposición

Si dos rectas se cortan en un punto los cuatro ángulos adyacentes que determinan suman dos ángulos llanos. Los pares de ángulos no consecutivos, se llaman ángulos opuestos por el vértice, y son iguales.

Proposición

Dos rectas son paralelas si y sólo al intersecarlas con otra recta, los ángulos *correspondientes* son iguales.



Proposición

Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido (los tres lados) son iguales a dos lados y el ángulo comprendido (los tres lados) de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Proposición

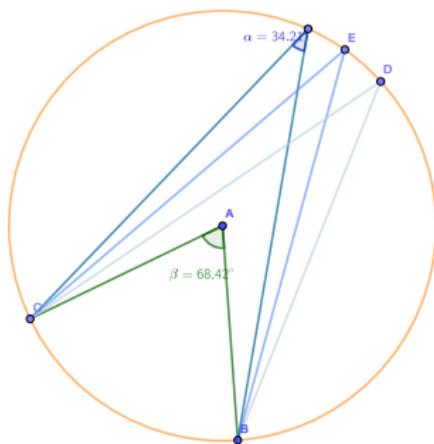
En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.

Proposición

La suma de los ángulos de un triángulo es igual al ángulo llano.

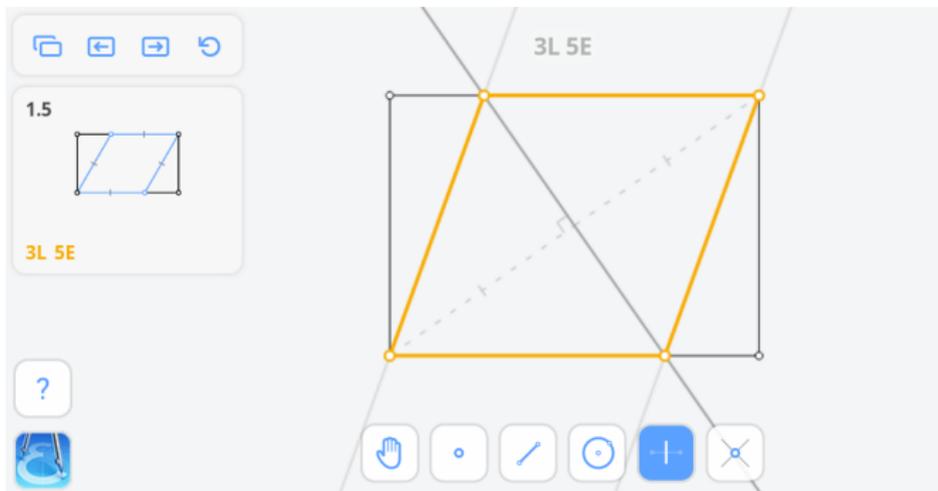
Proposición

Si un ángulo inscrito y un ángulo central subtienen el mismo arco, entonces el ángulo central es el doble del ángulo inscrito.



Euclidea

Euclidea (<https://www.euclidea.xyz/>) es un juego sobre la geometría euclídea. Para resolver cada puzle, hay que realizar la construcción pedida con regla y compás.





Euclidea

- ▶ $\alpha.2$. ¿Por qué el ángulo forma 90 grados? ¿Cuáles de las proposiciones anteriores necesitamos?



Euclidea

- ▶ $\alpha.2$. ¿Por qué el ángulo forma 90 grados? ¿Cuáles de las proposiciones anteriores necesitamos?
- ▶ $\alpha.5$. ¿Qué propiedad distingue a un rombo de un paralelogramo?



Euclidea

- ▶ $\alpha.2$. ¿Por qué el ángulo forma 90 grados? ¿Cuáles de las proposiciones anteriores necesitamos?
- ▶ $\alpha.5$. ¿Qué propiedad distingue a un rombo de un paralelogramo?
- ▶ $\alpha.7$. ¿Pistas? ¿Demostración?



Geogebra es un programa de matemáticas interactivas para enseñar (y aprender) matemáticas, en todos los niveles educativos.

Fue creado por Markus Hohenwarter en 2001.

Actualmente, hay un gran equipo de desarrolladores y se publica bajo licencias GPL y y Creative Commons.

Se puede usar en distintos soportes
(<https://www.geogebra.org/download>):

- ▶ En ordenadores, bajo Windows, iOS, Linux, ...
- ▶ En dispositivos Android.
- ▶ En teléfonos móviles.
- ▶ A través de un navegador
(<https://www.geogebra.org/graphing>).
- ▶ En Moodle.

Registro de usuarios.

En la versión web, pinchar en “CONECTAR” y después en “Crear una cuenta”.



Acceder con una conexión GeoGebra

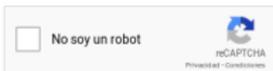
Correo electrónico

Nombre de usuario

contraseña

Tu contraseña es demasiado corta: debe tener al menos 6 caracteres.

Confirmación de
contraseña



Consentimiento Por favor, selecciona una de las siguientes opciones

Confirmo que soy mayor de 14 años, he leído los [Condiciones del servicio](#) y la [Política de Privacidad](#) y estoy de acuerdo con su contenido



Crear un paralelogramo a partir de un segmento y un punto. ¹

- ▶ Dibuja un segmento y un punto arbitrarios.
- ▶ Une uno de los extremos del segmento con el punto mediante un segmento.
- ▶ Crea una recta paralela  a cada uno de los segmentos pasando por el punto restante.
- ▶ Calcula la intersección  de las dos rectas.
- ▶ Usa la herramienta polígono  para unir los cuatro puntos.

¿A partir del segmento y el punto, existe una única solución?

Ejercicio: Usando tres o menos herramientas distintas, ¿de cuántos modos se puede construir un cuadrado a partir de un segmento dado?

¹Esta actividad y las siguientes están basadas en el tutorial

<https://www.geogebra.org/m/MqVqGRux#chapter/288218>



Construir la circunferencia circunscrita a un triángulo dado.

- ▶ Utiliza la herramienta polígono  para dibujar un triángulo.
- ▶ Calcula las mediatrices de los tres lados del triángulo.
- ▶ Calcula la intersección  de las mediatrices.
- ▶ Dibuja la circunferencia de centro la intersección anterior y de radio cualquiera de los vértices del triángulo.

¿Por qué las tres mediatrices se cortan en un punto?

¿Cuándo el circuncuncentro está en el interior del triángulo?

Ejercicio: Construye el baricentro (intersección de las medianas) y el incentro del triángulo. ¿Qué propiedad tiene el baricentro? ²

²Estas construcciones (y la solución de los ejercicios) las puedes descargar de <https://www.geogebra.org/u/jlbravo>.



Cambios de estilo.

Vamos a modificar el aspecto de la construcción anterior. En construcciones complejas, este paso es esencial para facilitar su comprensión.

- ▶ Selecciona el punto de intersección de las mediatrices. Selecciona configuración (en el menú contextual que se muestra al hacer click con el botón derecho del ratón). Cambia el color a verde y aumenta el tamaño.
- ▶ Selecciona una de las mediatrices. Vuelve al menú y cambia el estilo a discontinuo y el color a gris.
- ▶ Selecciona la herramienta . Pulsa en la mediatriz a la que haz cambiado el estilo y luego en las demás³.
- ▶ Cambia el color del triángulo (al que más te guste).

³La herramienta  también sirve para seleccionar un conjunto de objetos y cambiar sus propiedades, como seleccionar objetos.

Personalización de la vista gráfica.

Exploremos un poco la vista gráfica y veamos algunas opciones.

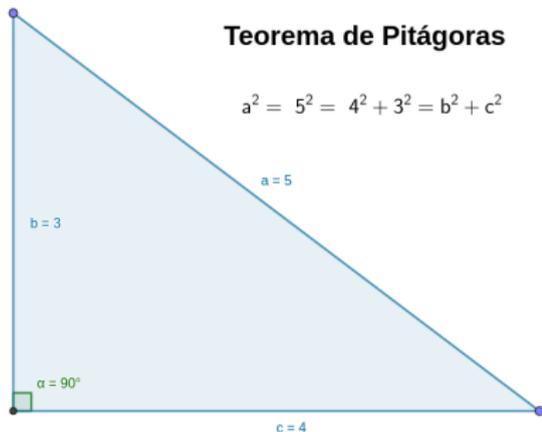
- ▶ Crea un triángulo rectángulo con catetos de longitud 3 y 4. Para ello, selecciona la herramienta de mover . Después abre la configuración.
- ▶ Activa la malla  y en el imán , elige la opción fijar a cuadrícula.
- ▶ Dibuja el triángulo con la herramienta polígono , con el ángulo de 90° en el origen de coordenadas (y los catetos en los ejes).
- ▶ Calcular los ángulos y la longitud de los lados de dicho triángulo, con las herramientas ángulo  y distancia .



Vamos a añadir más información al triángulo anterior.

- ▶ Cambia el nombre de la hipotenusa y los catetos a a,b,c. Para ello, selecciona cada uno de ellos y elige configuración.
- ▶ Inserta un texto **ABC** que ponga Teorema de Pitágoras (en negrita y grande).
- ▶ Inserta otro texto donde aparezca la fórmula y los valores particulares para el ejemplo. Para ello, deberás elegir fórmula latex, elegir el icono  en el menú inferior y escribir una fórmula como $a^2+b^2=a^2+b^2=c^2$.

Debería quedar algo como esto:



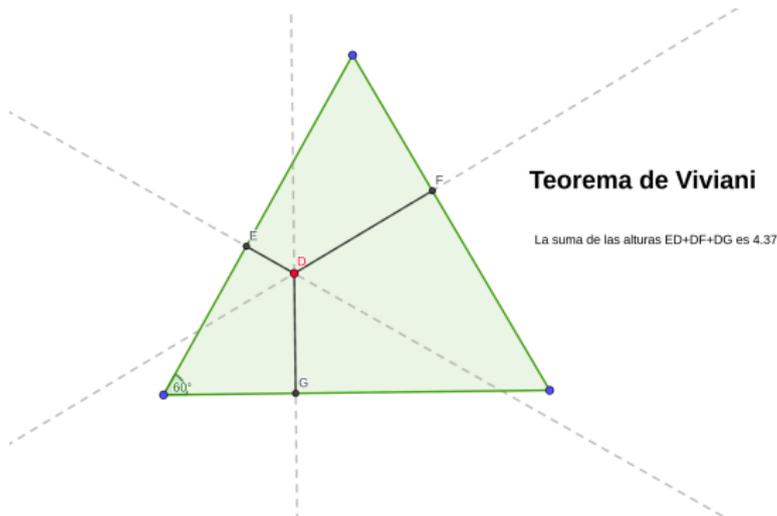
Prueba ahora mover los vértices para cambiar los valores.

Explora: Se puede extender la fórmula para que también haga el cálculo, escribiendo las fórmulas dentro de los cuadrados salmón. También sirve para explorar el Teorema del coseno, o las ternas pitagóricas.

Ejercicio: Crea un dibujo para mostrar el enunciado del Teorema de Viviani.

Teorema de Viviani

La suma de distancias de un punto interior a los lados de un triángulo equilátero es constante.



Controlar los objetos mostrados.

La recta de Euler es una recta donde están situados el ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo.

- ▶ Dibuja un triángulo con la herramienta polígono . Añádele los tres centros anteriores.
- ▶ Elige la herramienta  y oculta las líneas auxiliares seleccionándolas. Selecciona otra herramienta para que no se muestren dichas líneas. Traza la recta que une los tres centros anteriores.
- ▶ Prueba ahora mover uno de los vértices del triángulo para ver que los tres centros siguen alineados.
- ▶ Para volver a mostrar los centros anteriores, vuelve a elegir  y vuelve a seleccionar las líneas.



Controlar los objetos mostrados (II).

Vamos a continuar con el ejemplo anterior. Ahora vamos a permitir que el alumno pueda mostrar u ocultar ciertas partes de la construcción.

Para ello, seleccionamos la herramienta . A continuación, pulsamos en algún lugar de la pantalla, introducimos en “Rótulo” la leyenda que queramos que aparezca y posteriormente seleccionamos los elementos que queremos que se muestren/oculten. Se pueden seleccionar del desplegable o bien elegir la herramienta  y después seleccionarlos directamente del dibujo.

Crea tres controles, uno para cada uno de los centros, que muestren/oculten las líneas auxiliares de dicho centro.

Animar la construcción, mostrar el rastro.

Vamos a construir la inversión de una circunferencia respecto a otra.

- ▶ Crea dos circunferencias. El centro de una de ellas lo llamaremos O . Crea un punto en la otra circunferencia, P , con la herramienta .
- ▶ Inverso de P respecto a la circunferencia de centro O :

Toma un punto cualquiera de la circunferencia O , Q , traza la tangente a la circunferencia por Q y la mediatriz de PQ .

Usa el punto en el que se corten ambas rectas como centro de una circunferencia que pasa por P .

La intersección de dicha circunferencia con OP es P' , la inversión de P respecto de la circunferencia de centro O .



Vamos a animar la construcción anterior para que muestre cómo es la inversa de una circunferencia.

- ▶ Pulsa en el punto P' con el botón derecho y selecciona “Mostrar el rastro” .
- ▶ Selecciona la circunferencia original donde construimos el punto P . Elige opciones y selecciona “Objeto fijo”.
- ▶ Selecciona el cursor  y mueve el punto P alrededor de la circunferencia. Observa el rastro de P' .
- ▶ Pulsa el punto P con el botón derecho y selecciona “Animación”.
- ▶ Vamos a ver que la curva que describe el punto P' coincide con la inversa de la circunferencia respecto a la circunferencia de centro O . Para ello, elige la herramienta inversión  y selecciona las dos circunferencias.

Lugar geométrico.

Consideremos ahora la curva de Agnesi.

- ▶ Dibuja una recta (horizontal) y una circunferencia tangente a ella. Sea O el punto de la circunferencia más alejado de la recta.
- ▶ Con la herramienta , crea un punto en la recta, A. Mira la definición de la curva de Agnesi (por ejemplo, en Wikipedia) y construye un punto, B, de dicha curva.
- ▶ Selecciona el punto que has construido y activa la casilla de mostrar el rastro .
- ▶ Prueba mover el punto A para que muestre más puntos de la curva.
- ▶ Elige la herramienta “lugar geométrico”, , selecciona el punto B y después el A. Mostrará la curva de Agnesi.

Ejercicio.

Dibujar la estrofoide de una elipse.

