

Máster Universitario en Formación del Profesorado en Secundaria

Contenidos interactivos: Geogebra

Innovación docente e investigación

José Luis Bravo

Curso 2020/2021



Geogebra - Ecuaciones y funciones

Introducción

CAS

Vista algebraica

GGBScript

Principios de diseño de actividades Geogebra

Introducción al lenguaje GGBScript

Variables lógicas

Botones

Comando Valor

Casillas de entrada



Geogebra contiene un módulo CAS (Computer Álgebra System) que permite realizar cálculos simbólicos y numéricos.

Además, estos cálculos se pueden “visualizar” mediante la representación gráfica de las ecuaciones.

Por otra parte, Geogebra cuenta con un lenguaje de guión o “*script*”, denominado **GGBScript**, que permite elaborar secuencias de órdenes o aumentar la interactividad de las gráficas.

En esta introducción veremos cómo realizar cálculos sencillos, representar funciones y utilizar algunos comandos de **GGBScript**.



En esta sección, vamos a utilizar dos vistas similares, la vista algebraica \mathcal{N} y la vista CAS \mathcal{I}^x .

La vista CAS es más adecuada para cálculos simbólicos puros, es decir, cuando queremos resolver ecuaciones, simplificar, integrar, etc, pero no queremos visualizar el resultado.

La vista algebraica es más adecuada cuando nos interesa representar las funciones, máximos, raíces, etc.

En la vista CAS, podremos hacer operaciones y nos mostrará el resultado. Sin embargo, la vista algebraica crea un objeto con cada resultado, por lo que algunos comandos de la vista CAS no están disponibles en la vista algebraica.



Vista CAS

Comenzamos abriendo en Geogebra una vista CAS o bien en <https://www.geogebra.org/classic/cas>. Prueba los siguientes comandos¹:

- ▶ *Factoriza*(3422)
- ▶ *FactoresPrimos*(42)
- ▶ *MCD*(12, 15)
- ▶ *MCD*({12, 15, 22})
- ▶ *Desarrolla*(($x - 3$)³)
- ▶ *Simplifica*($\text{sen}(x)^2 + \text{cos}(x)^2$)

¹Basado en <https://www.geogebra.org/m/cFuF6Gpj#material/hEQZjFgc>



Igualdades y asignaciones

En Geogebra tenemos tres usos del igual: $:=$, $=$, $\stackrel{?}{=}$. El primero es la asignación, sirve para guardar un resultado en una variable. El segundo es el que se usa para definir las ecuaciones y el tercero comprueba si dos objetos son iguales. Veamos un ejemplo.

- ▶ Comenzamos asignando a dos variables a, b los valores 12 y 45:
 $a := 12, b := 45$
- ▶ Resolvemos la ecuación: $\text{Resuelve}(\text{MCD}(a, b) \cdot x = a \cdot b, x)$
- ▶ Para comprobar que el resultado es el mínimo común múltiplo:
 $\text{MCD}(a, b) \cdot \text{MCM}(a, b) \stackrel{?}{=} a \cdot b$ ($\stackrel{?}{=}$ se puede escribir como $==$).
- ▶ Prueba ahora cambiar el valor de a o de b .



Listas, vectores y matrices

Las listas de elementos y las matrices se escriben entre llaves. Los vectores entre paréntesis. También es válido en la vista algebraica.²

- ▶ $Sustituye(2x + 3y - z, \{x = a, y = 2, z = b\})$
- ▶ $Resuelve(\{x = 4x + y, y + x = 2\}, \{x, y\})$
- ▶ Para los siguientes comandos, vamos a crear una lista $v := \{1, 2, 3\}$.
- ▶ $2 \cdot v + 4$
- ▶ $v + \{1, 1, 0\}$
- ▶ $u := (1, 2, 3)$
- ▶ $m := \{\{0, 1, 0\}, \{1, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}\}$
- ▶ $m \cdot v$
- ▶ $m \cdot u$

²Para un tutorial más extenso: <https://wiki.geogebra.org/es/Listas>



Funciones

A partir de ahora, trabajaremos en la vista algebraica.

Podemos definir funciones, calcular derivadas, raíces, máximos y mínimos, etc.

- ▶ $f(x) = \exp(-x^2) - 1/2$
- ▶ $Integral(f(x), -1, 2)$
- ▶ $f'(x) = Derivada(f(x))$
- ▶ $Máximo(f(x), -2, 2)$
- ▶ $Raíces(f(x), -2, 2)$



Las funciones también pueden utilizarse como objetos geométricos.

- ▶ Selecciona la función $f(x) = \text{seno}(x)$.
- ▶ Inserta un punto en la gráfica.
- ▶ Calcula la recta tangente en dicho punto.
- ▶ Dibuja la gráfica de la derivada de $f(x)$
- ▶ Dibuja la pendiente de la recta tangente.
- ▶ Prueba mover el punto para ver que la pendiente coincide con el valor de la derivada.

Ejercicio: Añade la recta normal y la función que asigna a cada x el valor de la pendiente de la recta normal a la función $f(x)$.



Parámetros.

Para introducir un parámetro, basta asignarle un valor.

- ▶ $f(x) = \text{sen}(x)$
- ▶ $x_0 = 0$ (ajusta los límites al dominio de la gráfica)
- ▶ $f'(x) = \text{Derivada}(f(x))$
- ▶ $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- ▶ Prueba darle al *play* del parámetro x_0 .
- ▶ Muestra el parámetro x_0 para poder moverlo.



Vamos a ver un tercer método de mostrar la derivada.

Para ello, generamos un punto de la gráfica:

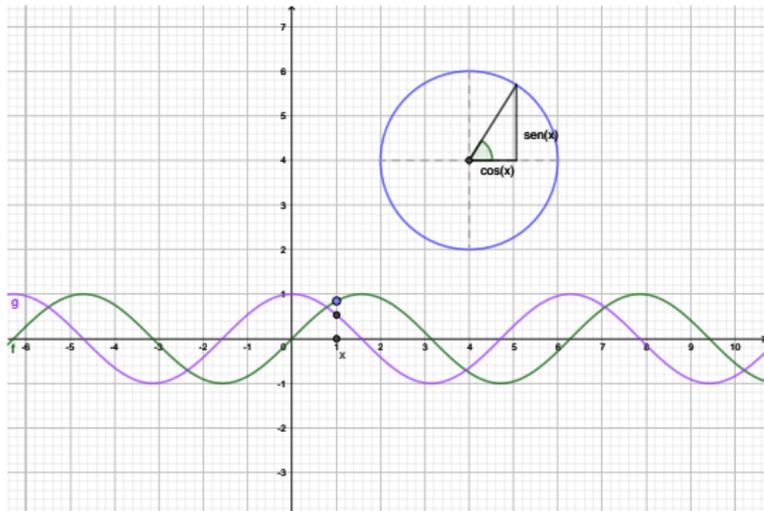
$$P = \text{Punto}(f)$$

Para obtener la coordenada x , usamos

$$x(P)$$

Y ahora podemos utilizar las fórmulas anteriores.

Vamos a aplicar lo anterior para mostrar las razones trigonométricas de un ángulo dado. El resultado ha de ser algo así:



Ejercicio: Añadir la tangente y la cotangente.

Ejercicio 2: Usar grados en lugar de radianes.



Funciones a trozos

El comando **Si** permite (entre otras muchas cosas), definir una función a trozos.

La sintaxis del comando es:

Si(condición 1, función 1, condición 2, función 2, ..., condición n, función n).

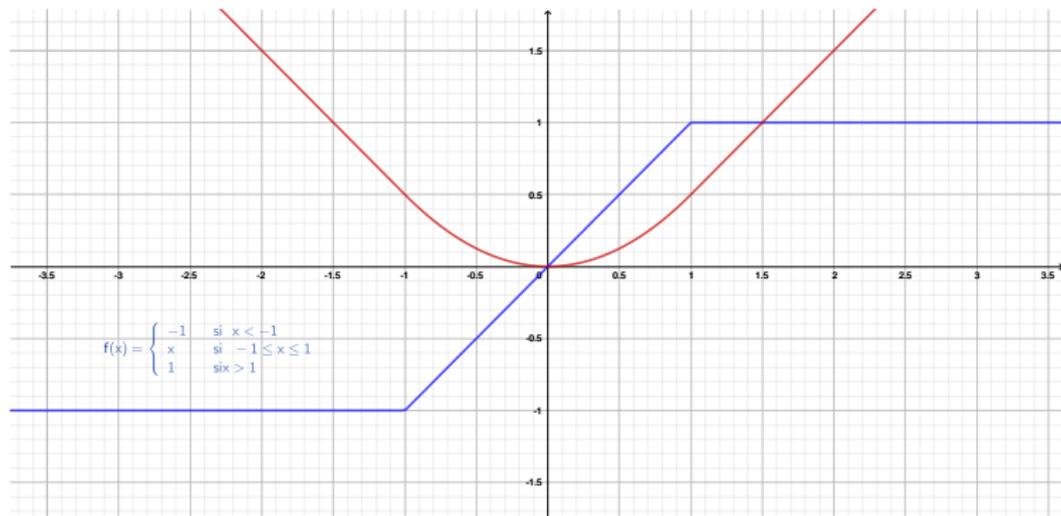
Por ejemplo, definimos una función a trozos:

$$f(x) = \text{Si}(x < 1, x, 1 \leq x \leq 2, x^2, x > 2, 7 - x)$$

Usando *Punto(f)*, definimos un punto en la gráfica y podemos ver los valores.

Ejemplo:

Vamos a dibujar la gráfica de $\int_0^x f(t) dt$, donde f es la siguiente función a trozos.



Ejercicio: Añade la derivada de $f(x)$ a la gráfica.

Organización de una actividad dinámica³.

- ▶ **Explicación.** Al comienzo de la actividad debes incluir una breve descripción del contenido, de una o dos líneas y en un tono personal.
- ▶ **Tareas.** Dentro de la actividad dinámica, es importante incluir algunas tareas/preguntas para que los alumnos trabajen dicha actividad. Colócalas al lado del applet. Trata de no incluir muchas (máximo tres o cuatro), de modo que la página se muestre entera en la pantalla. Si necesitas más, piensa en dividir la actividad en dos.
- ▶ **Evita distracciones.** Asegúrate de que la actividad contenga únicamente los objetos necesarios para conseguir los objetivos. No incluyas elementos púramente decorativos (o música de fondo) para evitar distraer a los alumnos.

³Las siguientes recomendaciones están basadas en <https://www.geogebra.org/m/e9Z6UDu4#chapter/160731>.

Figuras dinámicas (I).

- ▶ **Interactividad.** Permite toda la interactividad que sea posible. Como regla general todos los objetos visibles se deberían poder mover o modificar de algún modo.
- ▶ **Ergonomía.** Es importante que sea fácil de utilizar. Por ejemplo, los puntos que se pueden mover, deberían destacarse mediante el tamaño o el color. Los objetos que no se deben modificar directamente deben marcarlos como fijos. Ten en cuenta el soporte.

Figuras dinámicas (II).

- ▶ **El tamaño importa.** Intenta hacer las figuras lo más grandes posibles para que sea sencillo manipularlas, aunque siempre de modo que todo el dibujo entre en la pantalla.
- ▶ **Textos dinámicos y no estáticos.** Evita textos explicativos en las figuras (inclúyelos como texto en la actividad). Usa etiquetas en los objetos que faciliten la comprensión.
- ▶ **Primera impresión.** Cuando se abre una figura, la apariencia tiene que ser clara, evitando que se mezclen líneas o etiquetas.

Explicaciones y tareas (I).

- ▶ **Claras, cortas y sencillas.** Escribe el texto en un tono personal, breve y lo más claro posible.
- ▶ **Pocas preguntas.** Máximo tres o cuatro, para evitar páginas muy extensas.
- ▶ **Y específicas.** Evita preguntas generales (¿qué propiedad tiene?) y deja claro a los estudiantes qué es lo que tienen que hacer. Es aconsejable que los estudiantes tomen notas de los resultados, pero si quieres que lo hagan, ponlo en la actividad.

Explicaciones y tareas (II).

- ▶ **Usa las figuras.** El texto debe referirse a la figura, por ejemplo, si quieres explicar un nuevo concepto, hazlo mediante la figura. Para facilitar la comprensión de un concepto, puedes escribirlo en un color y usar el mismo en la figura para ese concepto.
- ▶ **Tu público son los alumnos.** Si quieres incluir información para otros profesores, hazlo en el metadata de la actividad.
- ▶ **Figuras demostrativas.** Si la figura es sólo para una presentación, no incluyas tareas ni preguntas. Pero si incluyes texto, que sea comprensible por los alumnos.

Todos los elementos que hemos visto hasta ahora (puntos, rectas, circunferencias, etc), se denominan objetos.

Hay dos tipos de objetos:

- ▶ **Objetos libres:** Su posición o valor no depende de ningún otro objeto. A menos que se hayan establecido como fijos, pueden desplazarse y modificarse libremente.
- ▶ **Objetos dependientes:** Aquellos creados mediante una herramienta o comando.

Además, todos los objetos pueden ser marcados como auxiliares. Los objetos auxiliares no aparecen en la vista algebraica (salvo que se seleccione en el desplegable mostrarlos).

Para saber más sobre los objetos auxiliares, se puede consultar https://wiki.geogebra.org/es/Objetos_libres,_dependientes_y_auxiliares.

Variables lógicas.

Una variable lógica es aquella que toma solo dos valores, “true” o “false”.

Si escribimos *true* o *false* en Geogebra, nos creará una variable con dicho valor.

Esa variable se puede mostrar como un “check box” en la vista.

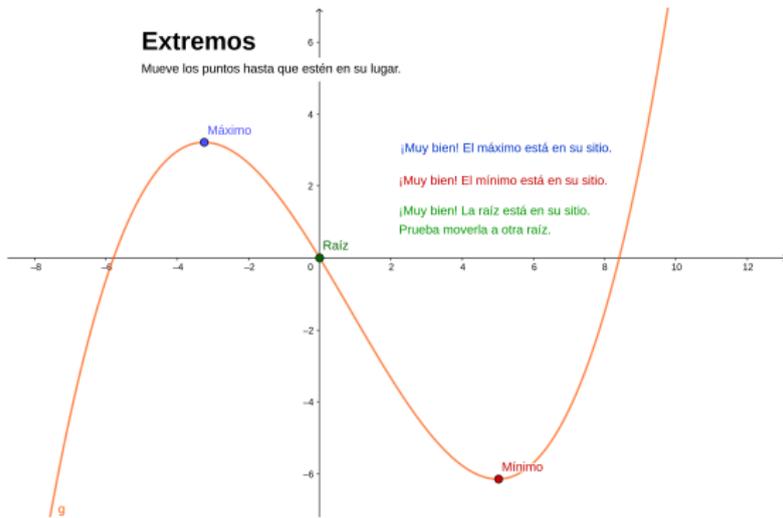
También podemos crear una variable lógica a partir de una operación que devuelva dicho tipo de valor.

Por ejemplo, $\frac{?}{=}$, $<$, \geq , $o \in$ ⁴.

⁴Más información en https://wiki.geogebra.org/es/Valores_L%C3%B3gicos

Ejemplo:

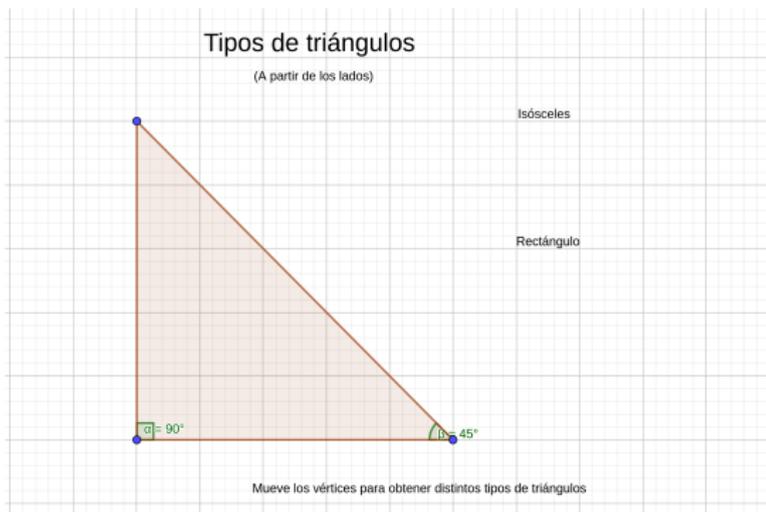
Vamos a crear una pequeña práctica interactiva donde el alumno debe colocar los extremos de una función en su sitio.



Ejercicio: Haz las mismas preguntas, pero ahora mostrando (sólo) la derivada de la función y pide únicamente los extremos y algún punto crítico.

Ejemplo:

Vamos a mostrar el tipo de un triángulo a partir de las longitudes de sus lados.



Ejercicio: Prueba añadir obtusángulo.

Botones

En Geogebra todos los objetos son botones, pero como estamos más acostumbrados a pulsar en objetos con la forma de botón, tenemos un constructor específico para ello `OK`⁵.

Cuando creamos un botón, nos permitirá poner el rótulo y el script de Geogebra. El Script es una secuencia de comandos que se activará cuando se pulse el botón.

Cualquier otro elemento puede utilizarse como botón. Basta entrar en propiedades, elegir “Programa de guión (scripting)” e introducir el script.

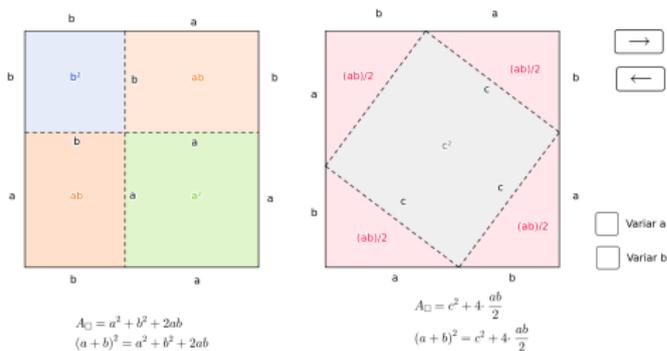
Tenemos dos posibles “eventos” para elegir. Cuando hacemos clic en él o cuando se actualiza (por ejemplo, cuando cambia de posición, de valor, etc).

⁵Puedes encontrar los comandos específicos para guiones en https://wiki.geogebra.org/es/Comandos_de_Guiones_-_Scripting.

Ejemplo

Usaremos los botones para ver una demostración paso a paso.

Teorema de Pitágoras



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

El comando **Valor** se aplica a dos objetos, $\text{Valor}(\text{Obj1}, \text{Obj2})$, y fija como valor del primer objeto el segundo objeto.

Podemos utilizar como primer objeto cualquier objeto libre.

¿Qué diferencia hay entre $\text{Obj1} = \text{Obj2}$ y $\text{Valor}(\text{Obj1}, \text{Obj2})$?

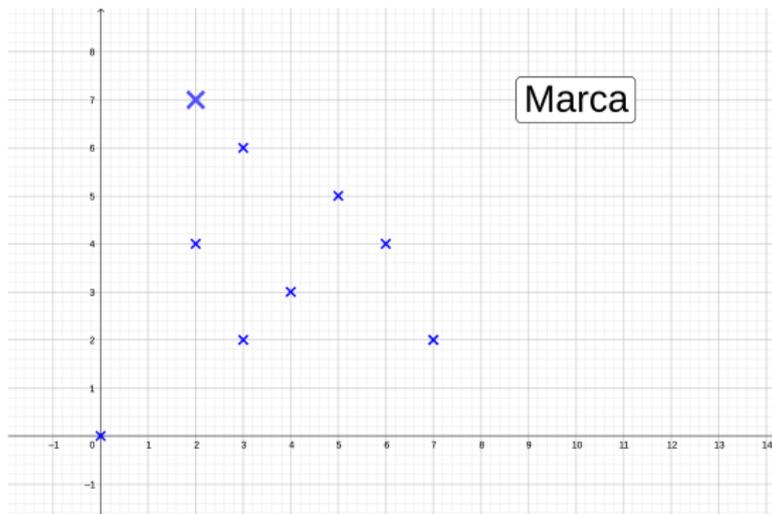
En el primer caso, Obj1 y Obj2 pasan a ser el mismo objeto, por lo que si modifico uno, se modifica el otro.

Sin embargo, si hago $\text{Valor}(\text{Obj1}, \text{Obj2})$ y modifico Obj2 , no se modifica Obj1 .

Veamos un ejemplo del comando Valor. La aplicación sería un pequeño contenido que nos permita guardar una serie de puntos.

- ▶ Crea una lista vacía, l ($l=\{\}$).
- ▶ Crea un punto libre A .
- ▶ Crea un botón con el script: `Valor(l, Añade(l, A))`

Debería quedar (después de marcar algunos puntos) algo como:





Casillas de entrada

Las casillas de entrada se insertan usando la herramienta  y pulsando el lugar donde se quiere que estén.

Nos pedirá un rótulo, que se mostrará al lado de la casilla de entrada y nos permite, de forma opcional, vincularla a un objeto que esté ya creado.

La casilla de entrada nos permite insertar números, texto, etc. Además, posee un botón, , que permite insertar caracteres especiales.

Ejemplo

Vamos a aplicarlo creando un *applet* que nos pregunte la derivada de una función mediante una casilla de entrada.

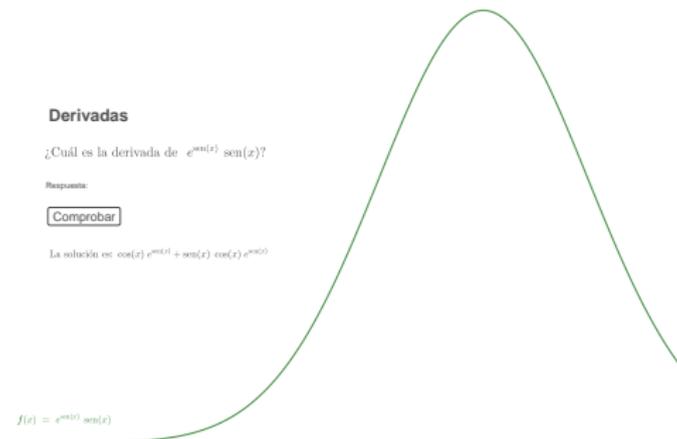
Derivadas

¿Cuál es la derivada de $e^{\cos(x)} \sin(x)$?

Respuesta:

La solución es: $\cos(x) e^{\cos(x)} + \sin(x) \cos(x) e^{\cos(x)}$

$f(x) = e^{\cos(x)} \sin(x)$



Ejercicio: Modificarlo para que pregunte primitivas.

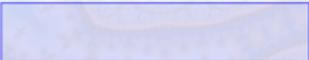
Ejemplo

Otro ejemplo, combinando texto como botones.

Ordenar fracciones

Ordena de menor a mayor

Comenzar $\frac{27}{38}$ $\frac{30}{50}$ $\frac{40}{19}$ $\frac{13}{27}$



Ordenar fracciones

Ordena de menor a mayor

Comenzar ¡Muy bien!



$\frac{13}{27}$ $\frac{30}{50}$ $\frac{27}{38}$ $\frac{40}{19}$