Las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria

Exponencial y logarimo

José Luis Bravo

Curso 2020/2021

Índice

Existen varias definiciones equivalentes de la función exponencial:

1. $\exp(x) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
2. $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
3. $\exp(x)$ es la única solución del p.v.i.

$$y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1.$$

4. Sea $x > 0$ y sea, por definición,

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

   Entonces la exponencial es la inversa de la función $\log$.
5. La función exponencial es la única función continua tal que

$$f(1) = e, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

Proposición

La serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

es absolutamente uniformemente convergente en todo compacto de $\mathbb{R}$*.*

Definición

Denominaremos función exponencial, denotada $\exp$, a la función continua (analítica) definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se verifica

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b).$$

Corolario

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(-x) = 1$.

Proposición

La función exponencial es estrictamente positiva y estrictamente creciente para todo $x \in \mathbb{R}$. Además,

$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0.$$

Proposición

Para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica

$$\exp'(x) = \exp(x), \quad \exp(0) = 1.$$

Veamos ahora la relación entre la exponencial y el número *e*.

Definición

Se define el número *e* como

$$e := exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Proposición

Se verifica

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Teorema

El número e es irracional.

Dados $x, a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, definimos

$$a^x := \sup_{p \leq x,\ p \in \mathbb{Q}} a^p.$$

Proposición

Para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica

$$\exp(x) = e^x.$$

Teorema

Sea

$$exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica:

1. $exp(x)$ *es continua y diferenciable.*
2. $exp'(x) = exp(x)$.
3. $exp(x)$ *es estrictamente creciente y* $exp(x) > 0$.
4. $exp(x + y) = exp(x)exp(y)$.
5. $exp(x) \to +\infty$ *cuando* $x \to +\infty$ *y* $exp(x) \to 0$ *cuando* $x \to -\infty$.
6. $\lim_{x\to+\infty} x^n exp(-x) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Como la función $\exp$ es estrictamente creciente, existe su función inversa.

Definición

Se define el logaritmo natural, $\ln$, como la función inversa de $\exp$, es decir, como la única función tal que

$$\ln(\exp(x)) = x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

Equivalentemente,

$$\exp(\ln(x)) = x, \quad \text{para todo } x > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Proposición

Para todo $x > 0$,

$$\ln'(x) = 1/x.$$

En particular, para todo $x > 0$,

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Proposición

Para cada $x, y \in \mathbb{R}^+$ se verifica

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

A partir de las funciones exponencial y logaritmo, podemos definir la potencia de modo directo.

Para $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$x^n = \exp(n \ln x), \quad x^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{\ln x}{n}\right).$$

Luego, para cada q racional,

$$x^q = \exp\left(q \ln x\right).$$

Definimos *potencia* $\alpha \in \mathbb{R}$ de $x > 0$ como

$$x^\alpha := \exp\left(\alpha \ln x\right), \quad \text{para } x, \alpha \in \mathbb{R},\ x > 0.$$

Fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos para cada $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$,

$$x^{\alpha} := \exp\left(\alpha \ln x\right).$$

Proposición

Se verifica que la derivada de x^{α} respecto de x es

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

y una primitiva es

$$\int x^{\alpha}\, dx = \begin{cases} \ln\ x & si\ \alpha = -1 \\ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & si\ \alpha \neq -1. \end{cases}$$

Teorema

Sea $\ln$ *la función definida implícitamente para* $x > 0$ *como*

$$\ln(\exp(x)) = x.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$*, se verifica:*

1. $\ln x$ *es continua y diferenciable.*
2. $\ln' x = \frac{1}{x}$.
3. $\ln x$ *es estrictamente creciente y* $(x-1)\ln x > 0$ *si* $x \neq 1$.
4. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ *para todo* $y \in \mathbb{R}^+$.
5. $\ln x \to +\infty$ *cuando* $x \to +\infty$ *y* $\ln \to -\infty$ *cuando* $x \to 0^+$.
6. $\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha} \ln x = 0$ *para todo* $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Una segunda aproximación es comenzar definiendo la función logaritmo.

Definición

Si $x > 0$, definimos el logaritmo natural o neperiano de x, $\ln x$, como

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Teorema

Si $x, y > 0$, entonces

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Corolario

Para todo número natural n y todo $x > 0$,

$$\ln(x^n) = n \ln x.$$

Corolario

Si $x, y > 0$, entonces

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y.$$

Proposición

La función ln *es estrictamente creciente y su imagen es* $\mathbb{R}$. *En particular*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Definición

Definimos la función exponencial, exp, como la función inversa de ln. Es decir,

$$\exp(\log(x)) = x, \qquad \text{para todo } x > 0.$$

Por la proposición anterior, la exponencial está bien definida y su dominio es $\mathbb{R}$.

Teorema

La función exponencial verifica

1. $\exp'(x) = \exp(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
2. $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.

Definición

Definimos el número e como

$$e := \exp(1).$$

Equivalentemente, e está definido implícitamente como

$$1 = \int_1^e \frac{dt}{t}.$$

Proposición

Para cada número racional q,

$$\exp(q) = e^q.$$

Análogamente, si $a > 0$, para todo x racional se verifica que

$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x \ln a}.$$

Por lo que la siguiente definición extiende la definición de exponencial sobre los racionales.

Definición

Si $a > 0$, definimos la función exponencial de a como

$$a^x := \exp(x \ln a).$$

Teorema

Si $a > 0$, entonces

1. $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ *para todo* $b, c \in \mathbb{R}$.
2. $a^1 = a$ *y* $a^{x+y} = a^x a^y$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.

A partir de la definición anterior, es sencillo obtener que

$$\left(g(x)^{h(x)}\right)' = g(x)^{h(x)} \left(h'(x) \ln g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)}\right).$$

En particular, si $f(x) = x^a$, entonces

$$f'(x) = ax^{a-1}.$$

Teorema

Si f es diferenciable y

$$f'(x) = f(x), \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R},$$

entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = ce^x, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Teorema

Si f es continua y

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \textit{para todo } x, y \in \mathbb{R},$$

entonces o bien $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ o existe $a > 0$ tal que

$$f(x) = a^x, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Teorema

Para todo natural n,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

Teorema

Para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

1. Desintegración radioactiva. Prueba del carbono 14.
2. Crecimiento de poblaciones. Modelo de Malthus y logístico.
3. Ley de enfriamiento de Newton.
4. Acústica: $B = 10 \log_{10} I/I_0$, donde $I_0 = 10^{-12} w/m^2$ es el umbral de audición.
5. Sismología: Escala Richter

$$M = \log A + 3\log(8\Delta t) - 2,92,$$

   - A: Amplitud de las ondas en milímetros tomadas del sismógrafo.
   - Δt: tiempo en segundos desde el inicio de las ondas primarias al de las ondas secundarias.
   - M es el valor en la escala, igual para terremotos que liberan la misma cantidad de energía.
6. Escalas logarítmicas y semilogarítmicas.