Las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria

Funciones trigonométricas

José Luis Bravo

Curso 2020/2021

Índice

Definición

Se define π como

$$\pi := 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Definición

Dado $-1 \leq x \leq 1$, definimos la función

$$A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Proposición

La función A es estrictamente decreciente en $[-1, 1]$ y toma los valores

$$A(-1) = \frac{\pi}{2}, \quad A(1) = 0.$$

Definición

Dado $0 \leq x \leq \pi$, definimos el coseno de x, $\cos x$ como el único número en $[-1, 1]$ tal que

$$A(\cos x) = \frac{x}{2}.$$

Dado $0 \leq x \leq \pi$, definimos el seno de x, $\operatorname{sen} x$ como

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

Teorema

Si $0 < x < \pi$*, entonces*

$$\cos'(x) = -\sin x, \quad \sin'(x) = \cos x.$$

Proposición

La función $\cos$ *se anula en un único valor de* $[0, \pi]$*. Es más, dicho valor es* $\pi/2$*. Es decir,*

$$\cos(x) = 0,\ x \in [0, \pi] \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

Definición

Sea $x \in (\pi, 2\pi)$. Entonces definimos el seno y el coseno de x como

$$\operatorname{sen} x := -\operatorname{sen}(2\pi - x), \quad \cos x := \cos(2\pi - x).$$

Definición

Sea $x = 2\pi k + \bar{x}$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ y $\bar{x} \in [0, 2\pi)$. Entonces definimos el seno y el coseno de x como

$$\operatorname{sen} x := \operatorname{sen} \bar{x}, \quad \cos x := \cos \bar{x}.$$

Teorema

Sea $x \in \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes propiedades:

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.
- $\operatorname{sen}'(x) = \cos x$, $\cos'(x) = -\operatorname{sen} x$.

Proposición

Se verifica que $\operatorname{sen}(k\pi) = \cos(k\pi + \pi/2) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$. *Además*

- $\cos(x) > 0$ *si* $x = 2k\pi + \bar{x}$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.
- $\cos(x) < 0$ *si* $x = 2k\pi + \bar{x}$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$.
- $\operatorname{sen}(x) > 0$ *si* $x = 2k\pi + \bar{x}$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in (0, \pi)$.
- $\operatorname{sen}(x) < 0$ *si* $x = 2k\pi + \bar{x}$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in (\pi, 2\pi)$.

Definición

Las funciones secante, cosecante, tangente y cotangente se definen, respectivamente, como

$$\sec\ x = \frac{1}{\cos\ x}, \quad \csc\ x = \frac{1}{\operatorname{sen}\ x}, \quad \tan\ x = \frac{\operatorname{sen}\ x}{\cos\ x}, \quad \cot\ x = \frac{\cos\ x}{\operatorname{sen}\ x}.$$

Proposición

- *Si $x \neq k\pi + \pi/2$, entonces*

$$\sec'(x) = \sec\ x \tan\ x, \quad \tan'(x) = \sec^2 x.$$

- *Si $x \neq k\pi$, entonces*

$$\csc'(x) = -\csc\ x \cot\ x, \quad \cot'(x) = -\csc^2 x.$$

Para obtener las funciones inversas, debemos restringirnos a un intervalo donde sean monótonas y continuas. Así, consideraremos las siguientes funciones:

$$f(x) = \operatorname{sen}\ x \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$g(x) = \cos\ x \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

$$h(x) = \tan\ x \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Denominaremos a las funciones inversas de f, g, h como función arcoseno, arcocoseno y arcotangente y las denotaremos $\operatorname{arcsen}, \operatorname{arccos}, \operatorname{arctan}$, respectivamente.

Teorema

Si $-1 < x < 1$*, entonces*

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$*, se verifica*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Lema

Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ *y verifica*

$$f''(x) + f(x) = 0, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0.$$

Entonces $f(x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Teorema

Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ *y verifica*

$$f''(x) + f(x) = 0, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = b, \quad f'(0) = a.$$

Entonces $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Teorema

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se verifica

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

Teorema

Para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Teorema (Identidad de Euler)

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Corolario

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$