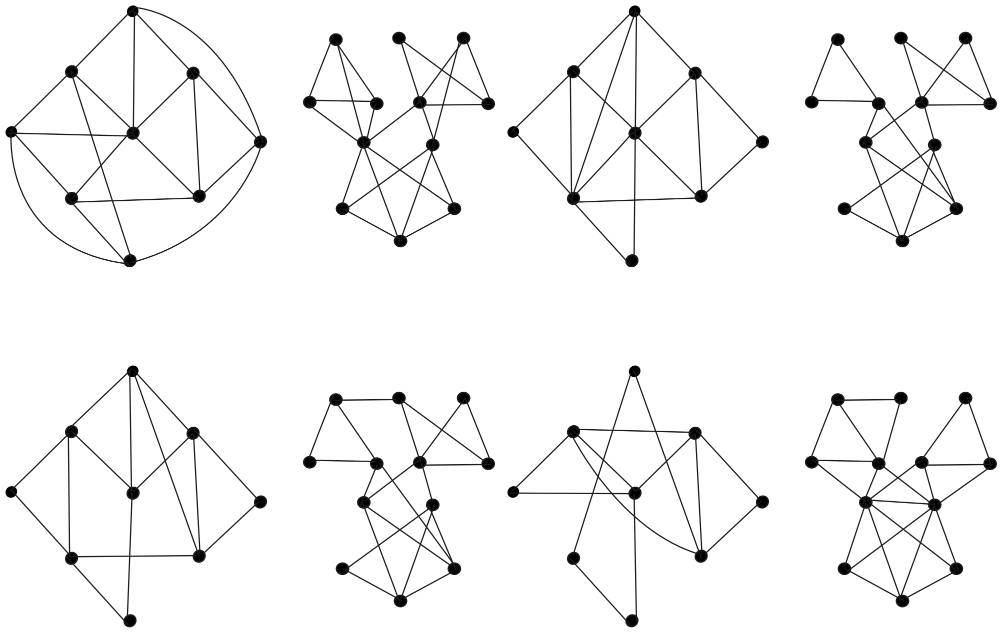
Ejercicios

1. Obtener para cada uno de los siguientes grafos si son eulerianos o hamiltonianos. En caso de ser eulerianos, dar además un circuito euleriano.



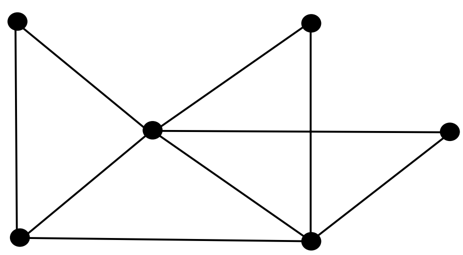
2. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo.

   Se llama *punto de corte* a un vértice v de G tal que el subgrafo G_v de G con vértices en $V - \{v\}$ y cuyas aristas son las de E que tienen vértices en $V - \{v\}$ no es conexo.

   Se llama *itsmo* a una arista e de E tal que el subgrafo $(V, E - \{e\})$ no es conexo.

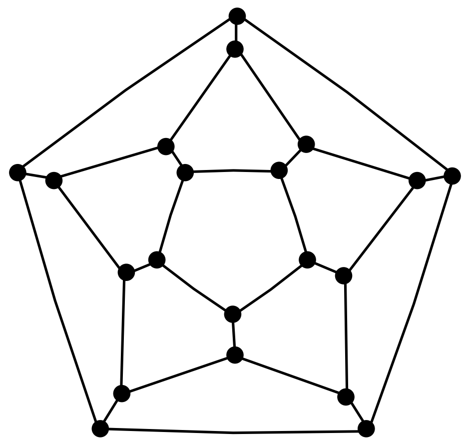
   Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo con un itsmo. Probar que en tal caso G contiene algún vértice de grado impar.

3. Una empresa de autopistas ha contratado a una empresa de seguridad para que patrulle la red de autopistas cuyo mapa está esquematizado en la siguiente representación gráfica:



La empresa de seguridad quiere realizar el servicio con un solo vehículo y quiere determinar la existencia un recorrido de la red de modo que se vigilen los tramos de la autopista una única vez. ¿Existe tal recorrido? ¿Cuál es? ¿Es solución única?

4. Encontrar un ciclo hamiltoniano para el grafo de la siguiente figura:

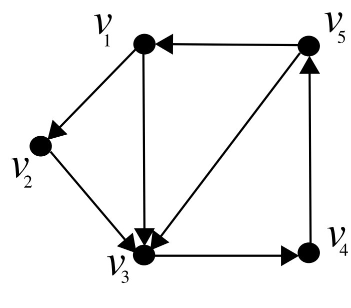


Este ejercicio fue comercializado en forma de juego llamado "icosian game". Nótese que el grafo corresponde a un dodecahedro. ¿Los demás sólidos platónicos también serán hamiltonianos?

5. Sea K_n el grado completo de n vértices. Probar para qué valores de n K_n es euleriano y para qué valores de n K_n es hamiltoniano.

6. Probar que un grafo regular, conexo, con un número par de vértices y un número impar de aristas, no es euleriano.

7. Estudiar si en el digrafo representado por la siguiente figura existe algún camino entre v_2 y v_5 utilizando su matriz de adyacencia.



8. Sea G un grafo y M su matriz de adyacencia. Se suponen conocidos los siguientes resultados de teoría de grafos:

(a) El coeficiente $m_{i,j}^n$ de la matriz M^n es el número de caminos de longitud n con extremos v_i y v_j.

(b) Supongamos que G tiene p vértices. Sea $C = M^p + M^{p-1} + ... + M$. Existe un camino entre los vértices v_i y v_j si y solo si el coeficiente $c_{i,j}$ de la matriz C es no nulo.

(c) Si C es la matriz definida en el apartado anterior, el grafo G es conexo si y solo si todos los coeficientes de C son no nulos.

¿Serán ciertos estos resultados si se sustituye la palabra grafo por multigrafo?

9. Probar que todo subgrafo conexo de un árbol es también un árbol.

10. Probar que todo grafo conexo con menor número de aristas qe de vértices debe ser un árbol.

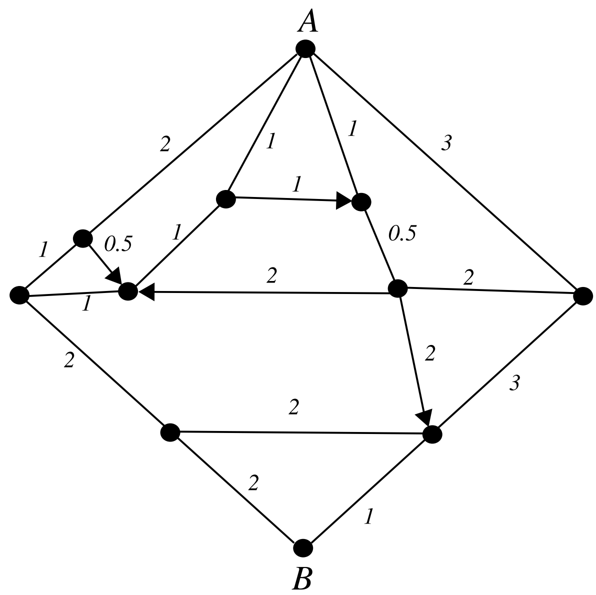
11. Pruébese que en un grafo $G = (V, E)$ que posee k componentes conexas se verifica la siguiente desigualdad:
$$\#E \leq \frac{1}{2}(\#V - k)(\#V - k + 1).$$
Como consecuencia, pruébese que si el grafo verifica
$$\#E > \frac{1}{2}(\#V - 1)(\#V - 2),$$
entonces es conexo.

12. Podemos representar un grafo etiquetado de vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$ mediante su matriz de adyacencia del siguiente modo: En cada posición i, j de la matriz de adyacencia ponemos 0 si no hay un camino de v_i a v_j y la etiqueta $d(v_i, v_j)$ si lo hay.

    Obtener mediante el algoritmo de Dijstra lel camino de longitud mínima (y su longitud) entre los vértices v_1 y v_8 del grafo G dado por la matriz de adyacencia:
$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 8 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 8 & 6 & 4 & 0 & 6 & 9 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 9 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Demostrar el Teorema de Bondy–Chvátal: "Un grafo es hamiltoniano si y sólo si lo es su clausura", donde la clausura de un grafo se define del siguiente modo: La clausura de un grafo $G = (V, E)$ es el grafo obtenido añadiendo la arista $\{u, v\}$ para cada par de vértices no adyacentes u, v tales que $gr(u) + gr(v) \geq \#E$ y repitiendo el proceso con el grafo resultante hasta que no se añadan nuevos vértices.

14. El siguiente mapa representa las calles de una ciudad entre dos puntos A y B. Cada etiqueta representa la longitud de la correspondiente calle. Según se indica en el mapa, algunas de las calles tienen dirección única. Encontrar la distancia entre A y B y entre B y A.



15. Un hidrocarburo saturado es una molécula C_nH_n tal que cada átomo de carbono tiene cuatro enlaces simples, cada átomo de hidrógeno uno y ninguna secuencia de enlaces forma un ciclo. Probar que para cada $m \in \mathbb{N}$, $C_M H_n$ existe si y sólo si $n = 2m + 2$.

16. Obtener el árbol recubridor minimal mediante el algoritmo de Kruskal y mediante el algoritmo de Prim del siguiente grafo: Obtener también el flujo maximal entre O y D.