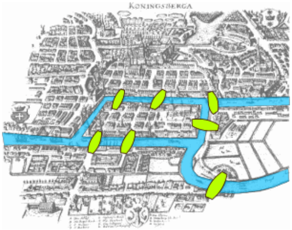
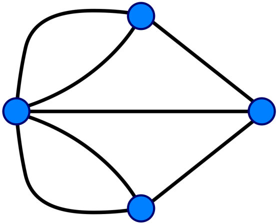
Introdución a la Teoría de Grafos

José Luis Bravo Trinidad

Las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria
Curso 2018-2019

Grafos:
Isomorfía, conexión y grados





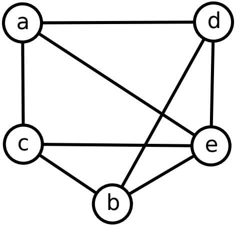
La Teoría de Grafos comenzó en 1735 al resolver Leonard Euler el problema de los puentes de Königsberg.

Los grafos permiten modelizar situaciones en lo que lo único que importa es si los objetos están relacionados.

Tienen multitud de aplicaciones:

- Redes de comunicaciones
- Modelos dinámicos discretos
- Inteligencia artificial
- etc

Definición de grafo



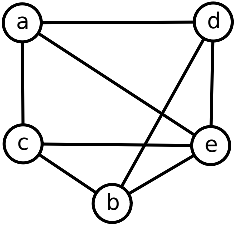
Un **grafo** está formado por:

- Un **conjunto de vértices**, V.
- Un **conjunto de aristas**, E.
- Una aplicación inyectiva γ

$$\gamma \colon E \to (V \times V)^*.$$

$(V \times V)^*$ es el conjunto de pares no ordenados de vértices distintos.

Definición de grafo

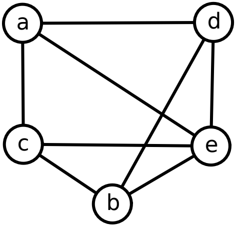


La aplicación inyectiva γ determina para cada arista los vértices que conecta.

Decimos que dos vértices $u, v \in V$ son **adyacentes** si existe $e \in E$ tal que $\gamma(e) = \{u, v\}$.

En el caso anterior, decimos que e es **incidente** con u y v y que u, v son los **extremos** de e.

Definición de grafo



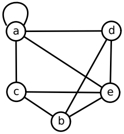
En los grafos se suele omitir γ y cada arista e se nombra como $\gamma(e)$.

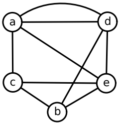
En el grafo de la izquierda:

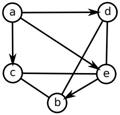
$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$\begin{aligned} E =& \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \\ & \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \\ & \{c, e\}, \{d, e\}\} \end{aligned}$$

Generalizaciones del concepto de grafo





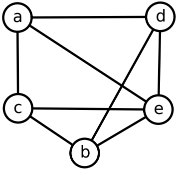


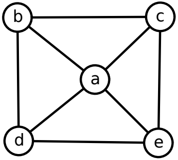
Si admitimos vértices conectados con ellos mismos: **pseudografo**. En dicho caso se denominan **lazos** a las aristas que conectan un vértice consigo mismo.

Si la aplicación γ no es inyectiva: **multigrafo**. Se denominan **paralelas** a las aristas que conectan los mismos vértices.

Si los pares de vértices son ordenados: **digrafo** o **grafo dirigido**

Grafos isomorfos





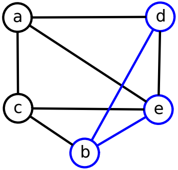
Dos grafos $G = (V, E, \gamma)$ y $G = (V', E', \gamma')$ son **isomorfos** si existen biyecciones

$$f : V \to V', g : E \to E'$$

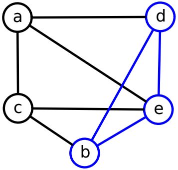
tales que $f(\gamma(a)) = \gamma'(g(a))$.

Dos grafos son isomorfos si *renombrando los vértices y aristas* del primero, obtenemos el segundo

Subgrafos

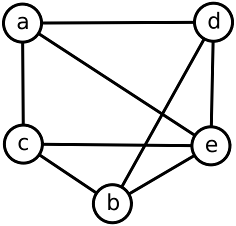


Denominamos **subgrafo** de un grafo a un grafo obtenido tomando un subconjunto de vértices y un subconjunto de aristas y todos los extremos de estas.



Denominamos **subgrafo completo** de un grafo a un grafo obtenido tomando un subconjunto de vértices y todas las aristas cuyos extremos sean esos vértices.

Representación con listas



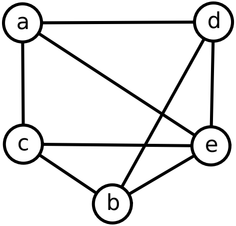
Lista de incidencia: Se enumeran las aristas

$$\{\{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$$

Lista de adyacencia: Se enumeran los vértices adyacentes:

$$\{\{a \to c, d, e\}, \{b \to c, d, e\}, \{c \to a, b, e\}, \{d \to a, b, e\} \{e \to a, b, c, d\}\}$$

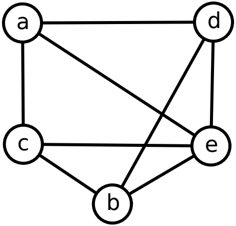
Representación con matrices



Matriz de incidencia: Se representan las aristas. -1 del vértice que sale y 1 al vértice que llega.

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} \quad a & \quad b & \quad c & \quad d & \quad e \end{matrix} \\
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Representación con matrices



Matriz de adyacencia: En la posición (i, j) hay un 1 si las aristas i, j son adyacentes.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Isomorfía a partir de la matriz de adyacencia

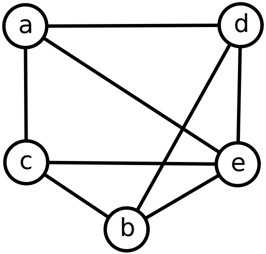
Sean $M_G, M_{G'}$ matrices de adyacencia de los grafos G y G'.

Teorema

Los grafos G y G' son isomorfos si y solo si existe una matriz de permutaciones P tal que $PM_G = M_{G'}P$.

$$M_G = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_{G'} = \begin{array}{c} \\ a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a' & b' & c' & d' & e' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Grado de un vértice



Denominamos **grado** de un vértice al número de aristas que lo tienen como extremo.

En el grafo de la figura:

$$\mathrm{gr}(a) = 3, \ \mathrm{gr}(e) = 4$$

Se denomina **secuencia de grados** de un grafo a la lista (decreciente) de los grados del grafo.

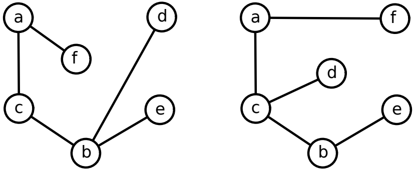
$$(4, 3, 3, 3, 3)$$

Secuencia de grados

Proposición

Si dos grafos son isomorfos, entonces tienen la misma secuencia de grados.

Dos grafos pueden tener la misma secuencia de grados y no ser isomorfos.



Suma de los grados

Teorema

Sea $G = (V, E)$ *un grafo y* $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$. *Entonces*

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{gr}(v_i) = 2\#E.$$

Teorema (Havel-Hakimi)

Una secuencia de enteros $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k \geq 0$ *es la secuencia de grados de un grafo si y sólo si la secuencia*

$$(n_2 - 1, \ldots, n_{n_1+1} - 1, n_{n_1+2}, \ldots, n_k)$$

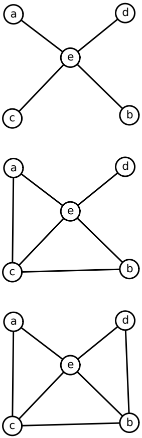
es la secuencia de grados de un grafo.

Algoritmo de Havel-Hakimi

Para determinar si una secuencia de enteros es la secuencia de grados de un grafo:

- Tenemos una secuencia $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k \geq 0$
- Si todos los elementos son cero, terminamos con respuesta afirmativa.
- Eliminamos n_1 de la secuencia y restamos 1 a (los primeros) n_1 elementos.
- Si algún entero toma valor negativo, terminamos con respuesta negativa.
- Reordenamos la secuencia de mayor a menor.
- Volvemos al primer paso.

Algoritmo de Havel-Hakimi



Tomemos $(4, 3, 3, 2, 2)$. Asignamos a cada grado un nombre de vértice:

$$(\overset{e}{4}, \overset{c}{3}, \overset{b}{3}, \overset{d}{2}, \overset{a}{2})$$

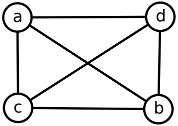
Unimos el vértice eliminado con los vértices a los que restamos.

$$(\overset{c}{2}, \overset{b}{2}, \overset{a}{1}, \overset{d}{1})$$

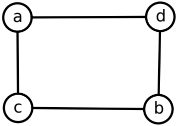
Repetimos el proceso: $(\overset{b}{1}, \overset{d}{1}, \overset{a}{0})$

Repetimos y terminamos: $(\overset{d}{0}, \overset{a}{0})$

Grafos regulares y completos



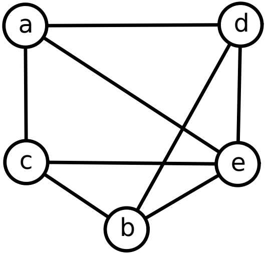
Denominamos **grafo completo** a un grafo tal que todos los pares de vértices están conectados. Denotamos K_n al grafo completo de n vértices.



Denominamos **grafo** k**-regular** a todo grafo tal que todos sus vértices tienen grado k.

Todo grafo completo es $n-1$ regular.

Cliques y conjuntos independientes



Un **clique** es un subgrafo isomorfo a un grafo completo.

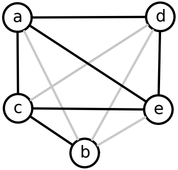
Un **conjunto independiente** de un grafo es subgrafo completo sin aristas.

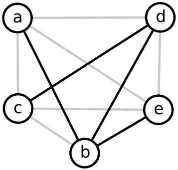
En el grafo de la figura:

$\{b, d, e\}$ es un clique.

$\{c, d\}$ es un conjunto independiente.

Complemento





Denominamos **complemento** o **inverso** de un grafo G a un grafo con el mismo conjunto de vértices tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si no lo son en G.

Un grafo G contiene un clique de k-vértices si y sólo si su complemento contiene un conjunto independiente de k-vértices.