

HOJA 1

Soluciones, campos de pendientes y PVI

1.1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Justifica las respuestas. Usamos t como variable independiente y $x = x(t)$ como incógnita. PVI significa problema de valor inicial.

- 1. Conceptos y clasificación.** Indica cuáles son EDO y cuáles EDP, su orden y, en las EDO de primer orden, si están escritas en forma explícita o implícita. Identifica la incógnita y las variables independientes.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x' = x, & \text{b) } x' + 2x = t, & \text{c) } (x')^2 + tx' - x = 0, \\ \text{d) } x'' + \sin x = 0, & \text{e) } u_t = c^2 u_{ss}, & \text{f) } tx' + x = \cos t. \end{array}$$

En e), $u = u(s, t)$ y $c > 0$. Da un ejemplo de condición inicial para a).

- 2. Comprobar soluciones.** Verifica por sustitución las familias siguientes y determina la constante que satisface el dato indicado:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x' = x, & x(t) = Ce^t, \quad x(0) = 3. \\ \text{b) } x' = -tx, & x(t) = Ce^{-t^2/2}, \quad x(0) = 2. \\ \text{c) } x' = 2t - x, & x(t) = Ce^{-t} + 2t - 2, \quad x(0) = 0. \end{array}$$

- 3. El intervalo forma parte de la solución.**

- Comprueba que $x(t) = 1/(1-t)$ resuelve $x' = x^2$. Determina su intervalo máximo que contiene a $t_0 = 0$.
- Comprueba que $x(t) = \sqrt{4-t^2}$ satisface $t + xx' = 0$ para $-2 < t < 2$. ¿Puede incluirse alguno de los extremos en el intervalo de una solución derivable?

- 4. Campos de pendientes e isoclinas.** Para $x' = x$, $x' = -tx$ y $x' = 2t - x$, calcula las pendientes en $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Encuentra las isoclinas de pendientes -1 , 0 y 1 , dibuja un campo aproximado y esboza la solución que pasa por $(0, 1)$.

- 5. Existencia y unicidad local.** Estudia si el teorema basado en la continuidad de F y F_x permite concluir existencia y unicidad en:

$$\text{a) } x' = x^2 - t, \quad x(0) = 1; \quad \text{b) } x' = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0; \quad \text{c) } x' = x/t, \quad x(1) = 2.$$

Indica un abierto adecuado cuando sea posible. ¿Que no se cumplan las hipótesis permite afirmar que no hay solución?

HOJA 2

Integración directa y ecuaciones lineales

1.2. Métodos de integración

Identifica el método, muestra los pasos y comprueba el resultado. En cada PVI indica el intervalo máximo de la solución que contiene al dato inicial.

6. Integración directa. Resuelve los PVI:

$$\text{a) } x' = 3t^2 - 2t + 1, \quad x(0) = 2; \quad \text{b) } x' = \frac{t}{1+t^2}, \quad x(0) = 0.$$

Explica por qué la solución es única y está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

7. Soluciones generales. Resuelve las ecuaciones lineales:

$$\text{a) } x' + \frac{5}{2}x = \frac{8}{5}t.$$

$$\text{b) } x' - \frac{2}{5}x = 29 \sin t.$$

$$\text{c) } x' + \frac{2}{t}x = t^2, \text{ en } t > 0.$$

Escribe en cada caso un factor integrante y separa la solución de la ecuación homogénea de una solución particular.

8. Problemas de valor inicial. Resuelve:

$$\text{a) } x' + 4tx = e^{-2t^2}, \quad x(0) = -\frac{43}{10}.$$

$$\text{b) } x' + 2x = t, \quad x(0) = 1.$$

$$\text{c) } tx' + x = \cos t, \quad x(\pi) = 0.$$

En c), distingue el intervalo en el que puedes dividir por t de la posible prolongación de la solución para la ecuación original en $t = 0$.

9. Un dato inicial singular. Considera $(t-2)x' = x$. ¿Existe solución con $x(2) = 1$? ¿Y con $x(2) = 0$? En este último caso, construye dos soluciones distintas definidas en $\mathbb{R}$. Explica por qué no hay contradicción con el teorema de unicidad.**10. Familia de soluciones y superposición.** Considera $x' = 2t - x$.

a) Obtén su solución general y la que cumple $x(0) = 4$.

b) Si x_1 y x_2 son soluciones, ¿qué ecuación satisface $x_1 - x_2$? ¿Es $x_1 + x_2$ necesariamente solución de la ecuación original?

c) Prueba que $x(t) - (2t - 2) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$ para toda solución.

11. Régimen transitorio y oscilación persistente. Resuelve

$$x' + x = 1,01 \cos(10t), \quad x(0) = 0.$$

Identifica el término que tiende a cero y la solución periódica a la que se aproxima. Calcula el período y la amplitud de esa oscilación. ¿Tiene $x(t)$ límite cuando $t \rightarrow +\infty$?

HOJA 3

Ecuaciones autónomas y separables

1.2. Métodos de integración

Antes de dividir por una función de x , busca las soluciones constantes. Combina la integración con el estudio del signo de x' .

12. Equilibrios y comportamiento cualitativo. Para $x' = x^2 - 1$:

- Encuentra los equilibrios y dibuja la recta de fases. Indica si las soluciones cercanas se aproximan o se alejan de cada equilibrio.
- Sin integrar, describe la monotonía para datos iniciales en $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$.
- Resuelve los PVI $x(0) = 0$, $x(0) = 2$ y $x(0) = -2$. Determina sus intervalos máximos y sus límites en los extremos.

13. Crecimiento con saturación. Considera $x' = x - 4x^2$. Obtén los equilibrios, la recta de fases y la solución general no constante. Resuelve los PVI con $x(0) = 1/8$ y $x(0) = 1/2$ y calcula sus límites cuando $t \rightarrow +\infty$. ¿Pueden sus gráficas cruzar la recta $x = 1/4$?

14. Separación de variables. Resuelve y determina los intervalos máximos que contienen a $t = 0$:

- $x' = -tx$, $x(0) = 2$.
- $x' = 2t(1 + x^2)$, $x(0) = 0$.
- $x' = tx^2$, primero con $x(0) = 1$ y después con $x(0) = 0$.

Explica por qué el último dato debe tratarse antes de dividir por x^2 .

15. Soluciones que esperan. En el PVI

$$x' = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0,$$

comprueba que, para cada $a \geq 0$, la función

$$x_a(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a, \\ (t - a)^2/4, & t > a \end{cases}$$

es solución en $\mathbb{R}$. Verifica explícitamente la derivabilidad en $t = a$. Compara estas soluciones con $x(t) \equiv 0$ y explica el fallo de unicidad.

16. Separación y prolongación. Resuelve

$$x' = \sqrt{1 - x^2}, \quad x(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Obtén la solución mientras $-1 < x(t) < 1$ y determina cuándo alcanza $x = -1$ y $x = 1$. Prolóngala a toda la recta mediante tramos constantes. Comprueba la ecuación en los puntos de unión. ¿Por qué no puede continuarse la fórmula trigonométrica sin cambiarla?

17. Una familia con parámetros. Para $a > 0$ y $b < 0$, estudia $x' = ax + bx^2$. Encuentra los equilibrios e integra la ecuación. Para $x(0) = x_0 > 0$, determina el límite futuro y cuándo la solución crece o decrece. Relaciona el resultado con el ejercicio 14.

HOJA 4

Cambios de variable

1.2. Bernoulli, Riccati y ecuaciones homogéneas

Deduce la ecuación transformada, resuélvela y vuelve a la variable original. Indica las restricciones del cambio y recupera las soluciones excluidas.

18. Bernoulli con exponente tres. Resuelve

$$x' + \frac{1}{2}x = x^3, \quad x(0) = \frac{1}{3}.$$

- Para $x \neq 0$, usa $u = x^{-2}$ y deduce una ecuación lineal para u .
- Elige el signo de x de acuerdo con el dato inicial y determina el intervalo máximo de la solución.
- Encuentra todas las soluciones constantes de la ecuación original. ¿Cuáles quedan excluidas por el cambio?

19. Bernoulli con coeficiente variable. Considera

$$x' + x = tx^2.$$

- Obtén las soluciones no nulas mediante $u = 1/x$.
- Resuelve el PVI $x(0) = 1$ y determina su intervalo máximo.
- Resuelve el PVI $x(0) = 0$. ¿Puede una solución no nula alcanzar el valor cero en un tiempo finito de su intervalo de definición?

20. Ecuación homogénea. En $t > 0$, resuelve

$$x' = \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2, \quad x(1) = 1.$$

Utiliza $u = x/t$, teniendo en cuenta que $x' = u + tu'$. Determina el intervalo máximo que contiene a $t = 1$ y estudia el comportamiento en sus extremos. Identifica la solución que se pierde si divides por u^2 .

21. Riccati con una solución conocida. Sea

$$x' = x^2 - 2tx + t^2 + 1.$$

- Comprueba que $x_p(t) = t$ es una solución particular.
- Para $x \neq x_p$, haz $x = t + 1/u$ y deduce la ecuación para u .
- Obtén la familia de soluciones y añade la solución excluida. Resuelve el PVI $x(0) = 1$ e indica su intervalo máximo.

22. Un cambio afín. Resuelve

$$x' = (t + x)^2, \quad x(0) = 0,$$

mediante $u = t + x$. Determina el intervalo máximo y verifica el resultado en la ecuación original. Explica por qué la ecuación para u es autónoma, aunque la ecuación para x no lo sea.

HOJA 5

Integrales primeras y ecuaciones exactas

1.2. Ecuaciones exactas y factores integrantes

Escribe cada ecuación como $M(t, x) + N(t, x)x' = 0$. Comprueba la exactitud antes de integrar e indica dónde es válido cada factor integrante.

23. Comprobar integrales primeras.

- Verifica que $U(t, x) = xe^{t^2/2}$ permanece constante sobre las soluciones de $x' = -tx$ y recupera dichas soluciones de $U = C$.
- Verifica que $V(t, x) = t^2 + x^2$ permanece constante sobre las soluciones de $t + xx' = 0$. Determina dónde $\nabla V \neq 0$. Para $C > 0$, describe las ramas de $V = C$ que son gráficas de soluciones y sus intervalos máximos. ¿Es la circunferencia completa una gráfica $x(t)$?

24. Una ecuación exacta polinómica. Resuelve

$$(2tx + 3) + (t^2 + 2x)x' = 0, \quad x(0) = 1.$$

Comprueba $M_x = N_t$ y calcula un potencial U tal que $U_t = M$, $U_x = N$. Da la solución implícita y justifica que define una única función $x(t)$ cerca del dato inicial.

25. Una ecuación exacta trigonométrica. Integra

$$(2t + x \cos t) + (\sin t + 2x)x' = 0.$$

Encuentra el nivel del potencial que corresponde a $x(0) = 1$. Comprueba el resultado derivando la relación implícita.

26. Factor integrante dependiente de t . Considera

$$(2t - t^2 - x^2) + 2xx' = 0.$$

- Prueba que no es exacta y busca un factor integrante $\mu(t)$.
- Calcula un potencial de la ecuación multiplicada por μ .
- Resuelve el PVI $x(0) = 1$ en forma implícita y selecciona la rama explícita válida cerca de $t = 0$.

27. Factor integrante dependiente de x . En el dominio $x > 0$, encuentra un factor integrante $\mu(x)$ e integra

$$2t + \left(\frac{t^2}{x} + 3x\right)x' = 0.$$

Obtén la relación implícita que satisface $x(0) = 1$ y explica por qué el factor no debe anularse en el dominio elegido.

28. Factor integrante radial. En el dominio $t > 0$, integra

$$t + xx' + t(tx' - x) = 0$$

buscando un factor de la forma $\mu(t^2 + x^2)$. *Indicación:* prueba con $\mu = (t^2 + x^2)^{-3/2}$ y utiliza las derivadas de $1/\sqrt{t^2 + x^2}$ y $x/\sqrt{t^2 + x^2}$ para encontrar un potencial.

HOJA 6

Modelización y aplicaciones

Tema 1. Selección del método e interpretación de resultados

Define la incógnita y sus unidades, formula el PVI y resuélvelo. Da primero una expresión exacta y después una aproximación con unidades. Considera $t \geq 0$ en todos los modelos.

- 29. Crecimiento bacteriano.** La tasa de crecimiento de un cultivo es proporcional al número de bacterias presentes. Al cabo de un día, la población es 1,25 veces la inicial.
- Formula el modelo y determina su constante de crecimiento.
 - Calcula los tiempos de duplicación y de triplicación.
 - Explica una limitación del modelo exponencial y cómo la ecuación logística de la hoja 3 permite representar recursos limitados.
- 30. Mezcla en un depósito.** Un depósito contiene 500 litros de disolución con 80 kg de sal. Entra disolución a 20 litros por minuto, con una concentración de 0,2 kg por litro. Sale mezcla perfectamente homogénea al mismo caudal.
- Justifica que el volumen permanece constante y formula el PVI para la masa de sal $S(t)$, en kg.
 - Calcula $S(t)$ y la masa límite cuando $t \rightarrow +\infty$.
 - ¿Cuánto tarda en alcanzar el 95 % de esa masa límite? ¿Cuál es entonces la concentración en kg por litro?
- 31. Desintegración radiactiva.** Una sustancia sigue un modelo de desintegración exponencial y pierde el 10 % de su masa en un día.
- Formula el PVI para una masa inicial $m_0 > 0$.
 - Calcula el período de semidesintegración.
 - Determina cuánto tarda en desaparecer el 99 % de la masa inicial. ¿Llega la masa a ser exactamente cero en un tiempo finito según el modelo?
- 32. Ley de Newton para el calentamiento.** Una barra metálica a 20 °C se introduce en agua mantenida a 100 °C. Al cabo de un minuto, la barra está a 51,5 °C. Supón que la tasa de cambio de su temperatura es proporcional a la diferencia entre la temperatura del agua y la de la barra.
- Formula y resuelve el PVI; determina la constante del modelo.
 - Calcula cuándo alcanza 99,9 °C.
 - Explica por qué la temperatura aumenta sin superar los 100 °C y si alcanza ese valor en un tiempo finito.
- 33. Circuito eléctrico RL.** La corriente $I(t)$ de un circuito satisface $LI' + RI = E$. Se conecta una fuente constante de 12 V a una resistencia de 4 Ω y una inductancia de 2 H, con $I(0) = 0$. Formula el PVI, calcula la corriente y su valor límite, y determina cuándo alcanza el 95 % de dicho valor. Expresa el tiempo en segundos.

HOJA 7

Ingeniería Química: materia y reacción

Tema 1. Balances de materia y cinética química

Los datos son hipotéticos. Formula el balance y el PVI, identifica el método y comprueba las unidades. Toma $t \geq 0$, expresado en minutos. Supón mezcla perfecta y temperatura constante; no hay reacción salvo que se indique.

- 34. Reactor discontinuo: cinética de primer orden.** En un reactor cerrado de volumen constante tiene lugar la reacción $A \rightarrow B$. La velocidad de desaparición de A por unidad de volumen es kC_A , donde C_A se mide en mol/L. Inicialmente $C_A(0) = 2$ mol/L y, a los 10 min, $C_A = 1,2$ mol/L.
- Deduce la ecuación para C_A y determina k , indicando sus unidades.
 - Calcula el tiempo necesario para consumir el 90 % de A .
 - Define la conversión como $X(t) = 1 - C_A(t)/C_A(0)$. Obtén una ecuación autónoma para X y explica si puede alcanzar $X = 1$ en un tiempo finito.
- 35. Reactor discontinuo: cinética de segundo orden.** En otro reactor cerrado de volumen constante, la velocidad de desaparición de A por unidad de volumen es kC_A^2 , con $k = 0,2$ L/(mol min) y $C_A(0) = 1$ mol/L.
- Formula y resuelve el PVI por separación de variables o usando $u = 1/C_A$.
 - Calcula los tiempos de semirreacción y de conversión del 90 %.
 - Si se duplica la concentración inicial, ¿cómo cambia el tiempo de semirreacción? Compara con una reacción de primer orden a k fijo.
- 36. Arranque de un reactor continuo agitado.** Un reactor de 100 L recibe y descarga 5 L/min. La alimentación contiene 2 mol/L de A ; en el reactor, A desaparece con velocidad kC_A , con $k = 0,05$ min⁻¹. Al arrancar, el reactor está lleno de disolvente sin A .
- Expresa el balance como acumulación = entrada – salida – consumo. Deduce y resuelve el PVI para $C_A(t)$.
 - Obtén la concentración estacionaria $C_{A,\infty}$ y calcula cuándo se alcanza el 95 % de ese valor.
 - Calcula la conversión estacionaria $1 - C_{A,\infty}/C_{A,\text{entrada}}$. Explica cómo influye aumentar k manteniendo los demás datos.
- 37. Depósito con volumen variable.** Un tanque de capacidad 200 L contiene inicialmente 100 L de disolución con 5 kg de soluto. Entran 4 L/min con concentración 0,1 kg/L y salen 2 L/min de mezcla. Supón que los volúmenes son aditivos y estudia el proceso hasta que se llena.
- Halla $V(t)$, el tiempo de llenado y el PVI para la masa de soluto $m(t)$.
 - Deduce la ecuación para $C(t) = m(t)/V(t)$ usando la regla del producto. Resuélvela y recupera $m(t)$.
 - ¿Se alcanza $C = 0,08$ kg/L antes de que se llene? No prolongues el modelo de caudales más allá del llenado.
- 38. Alimentación de concentración decreciente.** Un tanque de 100 L, inicialmente lleno de disolvente puro, recibe y descarga 10 L/min. La concentración de entrada es $C_e(t) = 2e^{-t/20}$ mol/L. Obtén $C(t)$, determina cuándo alcanza su máximo y calcula ese máximo. Justifica por qué al principio aumenta y a largo plazo tiende a cero, aunque la alimentación nunca se interrumpe.

HOJA 8

Ingeniería Química: calor y transferencia

Tema 1. Balances de energía y modelos de transferencia de materia

Usa los modelos simplificados y los datos hipotéticos indicados. Formula cada PVI, resuélvelo e interpreta el resultado para $t \geq 0$ en minutos. Las propiedades y los coeficientes se consideran constantes.

- 39. Calentamiento de un tanque con camisa.** Un tanque cerrado contiene 100 kg de líquido bien agitado, de calor específico $c_p = 4,2 \text{ kJ}/(\text{kg K})$. La camisa se mantiene a 80°C y transmite calor al líquido a razón de $UA(80 - T) \text{ kJ/min}$, con $UA = 8,4 \text{ kJ}/(\text{min K})$. Inicialmente $T(0) = 20^\circ\text{C}$. No hay reacción, cambio de fase ni otras entradas o pérdidas de calor.
- Formula el balance de energía y calcula $T(t)$.
 - ¿Cuánto tarda en alcanzar 75°C ? ¿Cómo cambia ese tiempo si se duplica UA ? Identifica la constante de tiempo $mc_p/(UA)$.
- 40. Calentador continuo perfectamente mezclado.** Un tanque contiene 200 kg de líquido con $c_p = 4 \text{ kJ}/(\text{kg K})$. Entran y salen 10 kg/min; la entrada está a 20°C y la salida a la temperatura $T(t)$ del tanque. Una resistencia aporta 1600 kJ/min. Inicialmente el tanque está a 20°C ; no hay reacción, cambio de fase ni pérdidas.
- Formula el balance de energía y determina $T(t)$ y su límite.
 - Calcula el tiempo para alcanzar 55°C . ¿Sería alcanzable esa temperatura si el aporte fuese de 800 kJ/min?
- 41. Absorción de oxígeno en un líquido.** En un recipiente sin entradas ni salidas de líquido, bien agitado y de volumen constante, se absorbe oxígeno desde una corriente gaseosa. Se supone que la tasa de transferencia por unidad de volumen es $k_L a(C^* - C)$, con $k_L a = 0,2 \text{ min}^{-1}$ y concentración de equilibrio constante $C^* = 8 \text{ mg/L}$. No hay consumo químico o biológico y $C(0) = 1 \text{ mg/L}$.
- Deduce y resuelve el PVI. Calcula el tiempo para alcanzar $7,5 \text{ mg/L}$.
 - Dibuja la recta de fases y explica por qué no se supera C^* . ¿Qué predice el mismo modelo si inicialmente $C(0) > C^*$?
- 42. Secado en período de velocidad decreciente.** La humedad en base seca $X(t)$ se mide en kg de agua por kg de sólido seco. Se propone $X' = -k(X - X_e)$, con humedad de equilibrio $X_e = 0,02$. Al comenzar este período $X(0) = 0,30$ y a los 10 min $X = 0,16$.
- Determina k y el tiempo necesario para alcanzar $X = 0,04$.
 - Si hay 50 kg de sólido seco, cuya masa permanece constante, calcula el agua eliminada hasta ese instante. ¿Puede alcanzarse $X < X_e$ según el modelo?
- 43. Reacción con desactivación del catalizador.** En un reactor discontinuo de volumen y temperatura constantes, la actividad del catalizador viene dada por $a(t) = e^{-0,02t}$. Se propone $C'_A = -k_0 a(t) C_A$, con $k_0 = 0,1 \text{ min}^{-1}$ y $C_A(0) = 1 \text{ mol/L}$. Integra la ecuación, calcula la concentración límite y la conversión máxima asintótica. ¿Se puede consumir el 99,9 % del reactivo? Compara con el caso sin desactivación, $a(t) \equiv 1$.