

HOJA 1

Ecuaciones lineales de segundo orden

2.1. Estructura y propiedades de las soluciones

Justifica las respuestas y comprueba las soluciones por sustitución. Usamos t como variable independiente y $x = x(t)$ como incógnita. En cada problema de valor inicial indica el intervalo de la solución.

- Sea $L(x)(t) = x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t)$, donde $a(t)$ y $b(t)$ continuas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Supóngase que $x_1(t) = t^2$ y $x_2(t) = t$ cumplen $L(x_1)(t) = t + 1$ y $L(x_2)(t) = 2t + 2$. Compruebe que $x(t) = t - 2t^2$ es solución de la ecuación diferencial $L(x)(t) = 0$.
- Sea la ecuación diferencial $2t^2x'' + 3tx' - x = 0$.
 - Compruebe que $x_1(t) = \sqrt{t}$ y $x_2(t) = 1/t$ son soluciones en el intervalo $(0, \infty)$.
 - Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} W(x_1, x_2)(t)$.
 - Resuelva el problema de valor inicial $2t^2x'' + 3tx' - x = 0$, $x(1) = 2$, $x'(1) = 1$.
- Sean $x_1(t) = t^2$ y $x_2(t) = t|t|$.
 - Demuestre que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son linealmente dependientes en el intervalo $[0, 1]$.
 - Demuestre que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son linealmente independientes en el intervalo $[-1, 1]$.
 - Calcule $W(x_1, x_2)(t)$.
 - Demuestre que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ no pueden ser soluciones de $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ con $a(t)$ y $b(t)$ continuas.
- Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ soluciones de la ecuación diferencial (de Bessel)

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - p^2)x = 0$$
 en el intervalo $(0, \infty)$ tales que $x_1(1) = 1$, $x_1'(1) = 0$, $x_2(1) = 0$, $x_2'(1) = 1$. Calcule $W(x_1, x_2)(t)$.
- Sea la ecuación diferencial $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ con $a(t)$ y $b(t)$ continuas en $\mathbb{R}$. Demuestre que $x(t) = t^2$ no puede ser solución de la ecuación diferencial.
- Sea la ecuación diferencial $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ con $a(t)$ y $b(t)$ continuas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes. Demuestre que si $W(x_1, x_2)(t) \equiv c \neq 0$, entonces $a(t) \equiv 0$.
- Sea la ecuación diferencial $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ y supóngase que hay existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial. Demuestre que las gráficas de dos soluciones distintas no pueden ser tangentes en ningún punto.
- Sea la ecuación diferencial $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ con $a(t)$ y $b(t)$ continuas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$.
 - Demuestre que si las funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ definidas en I se anulan en el mismo punto, entonces no pueden ser una base de soluciones de la ecuación diferencial.
 - Demuestre que si las funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ definidas en I alcanzan un máximo o un mínimo en el mismo punto, entonces no pueden ser una base de soluciones de la ecuación diferencial.
 - Demuestre que si $x_1(t)$, $x_2(t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial, entonces no pueden tener un punto de inflexión común a menos que $a(t)$ y $b(t)$ se anulen en dicho punto.
- Sea la ecuación diferencial $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ con $a(t)$ y $b(t)$ continuas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Pruebe que si una solución $x(t)$ tiene infinitos ceros en un intervalo compacto, entonces es la solución idénticamente nula.
- Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ con $a(t)$ y $b(t)$ continuas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Demuestre que los ceros de las dos solucio-

nes son distintos y se presentan de forma alternada, en el sentido de que $x_1(t)$ (resp. $x_2(t)$) se anula exactamente una vez entre cada dos ceros de $x_2(t)$ (resp. $x_1(t)$).

- 11.** Sea la ecuación diferencial $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ con $a(t)$ y $b(t)$ continuas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sean $x_1(t), x_2(t)$ soluciones tales que $W(x_1, x_2)(t_0) = 0$ y $x_1(t_0) = 0$, donde $t_0 \in I$. Pruebe que $x_1(t) \equiv 0$ o $x_2(t) = \frac{x_2'(t_0)}{x_1'(t_0)}x_1(t)$.
- 12.** Compruebe que $x(t) = e^{-t^2/2}$ es solución de $x'' + tx' + x = 0$. Obtenga una segunda solución linealmente independiente. Encuentre la solución que satisface la condición inicial $x(0) = 0, x'(0) = 1$.
- 13.** Sea la ecuación diferencial $tx'' - (1 + 3t)x' + 3x = 0$.
- Encuentre una solución de la forma $e^{\lambda t}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Encuentre otra solución linealmente independiente con la del apartado anterior.
- 14.** Sea la ecuación diferencial $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ con $a(t)$ y $b(t)$ continuas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Pruebe que existe un cambio de variable de la forma $x(t) = z(t)y(t)$ que transforma la ecuación en $y'' + A(t)y = 0$.
- 15.** Sea la ecuación diferencial $x'' + a(t)x = 0$, donde $a(t)$ es continua en $\mathbb{R}$. Pruebe que si $a(t) < 0$, cualquier solución no trivial tiene a lo sumo un cero.

HOJA 2

Segundo orden con coeficientes constantes

2.1. Métodos de integración

Identifica la ecuación homogénea asociada y el método de resolución. En los problemas de valor inicial determina las constantes y comprueba los datos.

16. Resolver la ecuación diferencial $x'' - 3x' + x = 0$.
17. Resolver el problema de valor inicial $x'' - 3x' - 4x = 0, x(0) = 1, x'(0) = 0$.
18. Resolver el problema de valor inicial $2x'' + x' - 10x = 0, x(1) = 5, x'(1) = 2$.
19. Resolver el problema de valor inicial $x'' + 5x' + 6x = 0, x(0) = 1, x'(0) = x'_0$.
20. Encuentre una solución particular de $x'' + x' + x = t^2$ por el método de los coeficientes indeterminados y por el método de variación de parámetros.
21. Resolver la ecuación diferencial $x'' - 4x' + 4x = (1 + t + \dots + t^{31})e^{2t}$.
22. Resolver la ecuación diferencial $x'' + 4x = \cos(2t)$
23. Resolver la ecuación diferencial $x'' + 2015^2x = \sin(2015t)$.
24. Resolver la ecuación diferencial $x'' - 2x' + 5x = 2\cos^2 t$.
25. Resolver la ecuación diferencial $x'' + x = \cos t \cos(2t)$.
26. Resolver la ecuación diferencial $x'' - 4x' + 5x = e^{2t}(t^2 + 1)$.

HOJA 3

Ecuaciones lineales de orden superior2.2. Coeficientes constantes

Calcula las raíces de la ecuación característica y sus multiplicidades. Construye una base de soluciones y comprueba el resultado.

27. Resuelva el problema de valor inicial

$$x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 0, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 1.$$

(Las raíces de la ecuación característica son $\lambda_1 = 1$ doble y $\lambda_2 = 2$.)

28. Resuelva la ecuación diferencial

$$x''' - 4x'' + 5x' - 2x = t^2.$$