HOJA 1

Sistemas de primer orden y campos de direcciones

3.1. Sistemas y ecuaciones diferenciales

Resuelve los sistemas y comprueba las soluciones propuestas. Calcula los puntos de equilibrio y analiza cualitativamente el comportamiento de las soluciones.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $x'(t) = 3, y'(t) = -1.$
- $x'(t) = t, y'(t) = 1 - t.$
- $x'(t) = 2, y'(t) = x(t).$
- $x'(t) = t, y'(t) = x(t) + t^2.$

2. Considera el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t, \\ \frac{dy}{dt} = x^2. \end{cases}$$

Para cada apartado, determina si la pareja $(x(t), y(t))$ propuesta es solución del sistema (sin resolver la ecuación).

a) $x(t) = t^2, \quad y(t) = \frac{t^5}{5}.$
b) $x(t) = \frac{t^2}{2}, \quad y(t) = \frac{t^5}{20}.$
c) $x(t) = \frac{t^2}{2} + 1, \quad y(t) = \frac{t^5}{20}.$
d) $x(t) = \frac{t^2}{2} + 1, \quad y(t) = \frac{t^5}{20} + t.$
e) $x(t) = \frac{t^2}{2} + 1, \quad y(t) = \frac{t^5}{20} + \frac{t^3}{3} + t - 1.$

3. Calcula las soluciones constantes (soluciones de la forma $x(t) = C, y(t) = D$, con $C, D \in \mathbb{R}$) del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x^3 - x. \end{cases}$$

4. Resuelve el siguiente sistema diferencial:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, & x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = x^2, & y(0) = 0. \end{cases}$$

5. Resuelve el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t), & x(0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = 1 - y(t), & y(0) = 0. \end{cases}$$

6. Resuelve:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t, & x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = tx, & y(0) = 0. \end{cases}$$

7. Dibuja el campo de direcciones del sistema diferencial

$$\begin{cases} x'(t) = -x^2(t), \\ y'(t) = -y^2(t). \end{cases}$$

en algunos puntos del plano. ¿Qué piensas que ocurrirá con las soluciones cuando $t \to +\infty$?

8. Dibuja el campo de direcciones del sistema diferencial

$$\begin{cases} x'(t) = -x^2(t), \\ y'(t) = 0. \end{cases}$$

en algunos puntos del plano. ¿Qué piensas que ocurrirá con las soluciones cuando $t \to +\infty$?

HOJA 2

Sistemas lineales

3.2. Sistemas diferenciales lineales

Resuelve y clasifica los sistemas lineales. En los problemas de valor inicial, determina las constantes y comprueba los datos iniciales.

9. Resuelve el sistema lineal

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) \end{cases}$$

10. Resuelve el sistema lineal

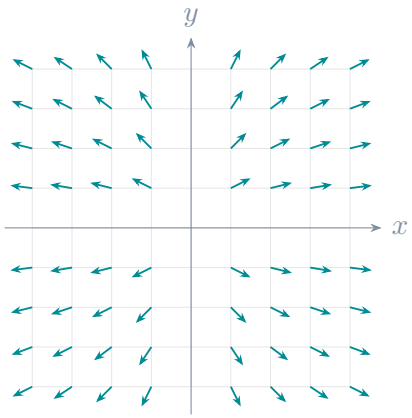
$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = y(t) \end{cases}$$

¿Qué ocurre con las soluciones cuando $t \to +\infty$?

11. Resuelve el sistema lineal

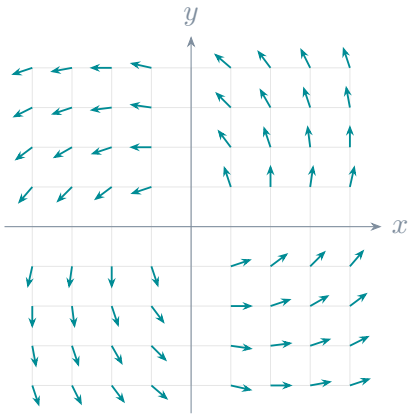
$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 5y(t) \end{cases}$$

12. A cuál de los siguientes sistemas diferenciales corresponde el campo de pendientes



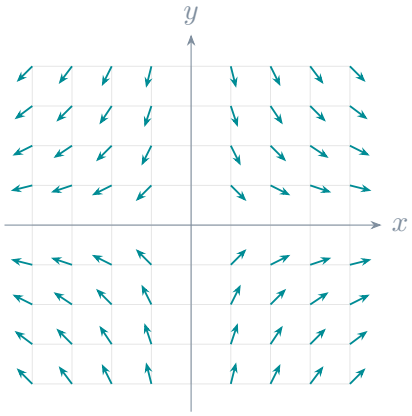
a) $x' = x, y' = -y,$
b) $x' = 2x, y' = y,$
c) $x' = -x - 2y, y' = 2x - y,$
d) $x' = x - 2y, y' = 2x + y,$
e) $x' = -y, y' = x.$

13. A cuál de los siguientes sistemas diferenciales corresponde el campo de pendientes



a) $x' = x, y' = -y,$
b) $x' = 2x, y' = y,$
c) $x' = -x - 2y, y' = 2x - y,$
d) $x' = x - 2y, y' = 2x + y,$
e) $x' = -y, y' = x.$

14. A cuál de los siguientes sistemas diferenciales corresponde el campo de pendientes



a) $x' = x, y' = -y,$
b) $x' = 2x, y' = y,$
c) $x' = -x - 2y, y' = 2x - y,$
d) $x' = x - 2y, y' = 2x + y,$
e) $x' = -y, y' = x.$

15. Resolver los siguientes problemas de valor inicial.

a)
$$\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = -y_1 \\ y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y_1' = 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 \\ y_1(0) = -9,\ y_2(0) = 15 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 + 9y_2 \\ y_2' = y_1 + 6y_2 \\ y_1(0) = -3,\ y_2(0) = -3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 4y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \\ y_1(0) = -4,\ y_2(0) = -4 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 5y_2 \\ y_1(0) = -3,\ y_2(0) = 7 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 4y_2 \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 4 \end{cases}$$

16. Encontrar una solución general de los siguientes sistemas lineales no homogéneos.

a)
$$\begin{cases} y_1' = y_2 + 6e^{2t} \\ y_2' = y_1 - 3e^{2t} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y_1' = 4y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 2 - 16t^2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y_1' = y_2 - 5\sin t \\ y_2' = -4y_1 + 17\cos t \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 - 4y_2 + 5e^t \\ y_2' = 5y_1 + 6y_2 - 6e^t \end{cases}$$

17. Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

a)

$$\begin{cases} y_1' = 5y_2 + 23 \\ y_2' = -5y_1 + 15t \\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = -2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 - t^2 + 6t \\ y_2' = y_1 + y_2 - t^2 + t - 1 \\ y_1(0) = 2,\ y_2(0) = -1 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + \cos t - \sin t \\ y_2' = -y_1 + \cos t + \sin t \\ y_1(0) = -1,\ y_2(0) = -6 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 4y_2 - 5t^2 + 6t + 25 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - t^2 + 2t + 4 \\ y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 + 2e^{2t} \\ y_2' = y_1 + 4y_2 + 3e^{2t} \\ y_1(0) = -\frac{2}{3},\ y_2(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$