

Matemáticas III

Tema 1: Ecuaciones diferenciales de primer orden

José Luis Bravo Trinidad

16 de septiembre de 2026

Versión provisional

Puede contener errores

Contenidos

1.1. Soluciones. Campos de pendientes. El problema de valor inicial.

1.2. Métodos de integración:

- Ecuaciones lineales
- Ecuaciones autónomas y de variables separadas.
- Cambio de variable.
- Ecuaciones exactas.
- Integrales primeras y factores integrantes.

Introducción: ecuaciones diferenciales

Una **ecuación diferencial** (ED) es una ecuación cuya incógnita es una función y en la que aparecen una o varias de sus derivadas. Resolverla significa encontrar las funciones que verifican la igualdad.

Ejemplo: ecuación y soluciones

En la ED

$$x'(t) = x(t),$$

la incógnita es la función $x(t)$. Todas las funciones

$$x(t) = Ce^t, \quad C \in \mathbb{R},$$

son soluciones, pues cumplen $x'(t) = x(t)$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Una **ecuación diferencial ordinaria** (EDO) tiene como incógnita una función de una sola variable independiente.

Ejemplo de EDO

$$x'(t) + 2x(t) = t.$$

La función desconocida es $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y la única variable independiente es t .

En adelante abreviaremos $x'(t)$ y $x(t)$ escribiendo, cuando no haya ambigüedad, x' y x .

Ecuaciones en derivadas parciales

Una **ecuación en derivadas parciales** (EDP) tiene como incógnita una función de varias variables y contiene derivadas parciales.

Ejemplo: ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),$$

donde la incógnita es $u(x, t)$. Una solución explícita es

$$u(x, t) = \text{sen}(x + ct).$$

En efecto,

$$u_{tt}(x, t) = -c^2 \text{sen}(x + ct) = c^2 u_{xx}(x, t).$$

Orden de una ecuación diferencial

El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en ella.

Ejemplo de primer orden

$$x'(t) = x(t).$$

La derivada de mayor orden es x' , por lo que la ecuación es de primer orden.

Ejemplo de segundo orden

$$x''(t) + \omega^2 \sin x(t) = 0, \quad \omega > 0.$$

La derivada de mayor orden es x'' .

EDO de primer orden: forma implícita

Una EDO de primer orden está en **forma implícita** cuando se escribe como

$$G(t, x(t), x'(t)) = 0,$$

donde $G: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplo de forma implícita

$$(x'(t))^2 + t x'(t) - x(t) = 0.$$

En este caso,

$$G(t, x, p) = p^2 + tp - x.$$

EDO de primer orden: forma explícita

Si se puede despejar la derivada, la ecuación queda en **forma explícita**:

$$x'(t) = F(t, x(t)),$$

donde $F: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplo de forma explícita

$$x'(t) = 2t - x(t), \quad F(t, x) = 2t - x.$$

La ecuación también puede escribirse implícitamente como $x'(t) - 2t + x(t) = 0$.

Ecuaciones diferenciales como modelos

Las ecuaciones diferenciales permiten describir cómo evoluciona una magnitud a lo largo del tiempo.

Ejemplo: crecimiento limitado de una población

$$P'(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K} \right), \quad r, K > 0.$$

$P(t)$ representa la población, r la tasa de crecimiento y K la capacidad del medio.

En este tema estudiaremos soluciones, campos de pendientes, problemas de valor inicial y métodos clásicos de integración.

1.1

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Estudiaremos ecuaciones diferenciales de primer orden en forma explícita,

$$x'(t) = F(t, x(t)),$$

donde $F: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

En particular, aprenderemos a:

- **definir, identificar y comprobar soluciones;**
- **interpretar geométicamente el campo de pendientes;**
- **formular problemas de valor inicial** y estudiar la existencia y unicidad de sus soluciones.

Definición de solución

Una solución de la ED $x'(t) = F(t, x(t))$ es una función $x: I \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$, tal que para todo $t \in I$

- x es derivable en t ,
- $(t, x(t)) \in D$,
- $x'(t) = F(t, x(t))$.

Si t es un extremo del intervalo I , se considera la derivada lateral correspondiente.

Ejemplos de ecuaciones y soluciones

En estos ejemplos, $D = \mathbb{R}^2$ y las soluciones están definidas en el intervalo $I = \mathbb{R}$.

Ejemplos de ecuaciones y soluciones

Ecuación	Solución	Comprobación
$x' = t$	$x(t) = t^2/2$	$x'(t) = t$
$x' = x$	$x(t) = e^t$	$x'(t) = e^t = x(t)$
$x' = x^2 - 1$	$x(t) \equiv 1$	$x'(t) = 0 = 1^2 - 1$
$x' = 2t - x$	$x(t) = 2t - 2$	$x'(t) = 2 = 2t - x(t)$

Una solución también puede ser **constante**, como en el tercer ejemplo.

Campo de pendientes: cómo leerlo

La ecuación $x' = F(t, x)$ nos dice **qué pendiente debe tener una solución** al pasar por cada punto (t, x) .

Del número al dibujo

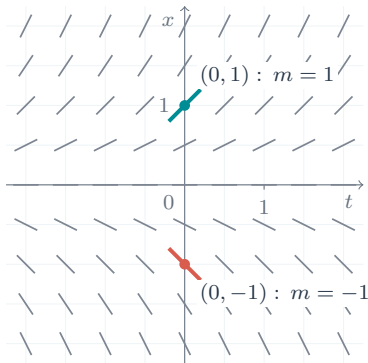
Calculamos $F(t, x)$ y dibujamos un pequeño segmento con esa pendiente. El conjunto de segmentos es el **campo de pendientes**.

Al recorrer una solución hacia la derecha, es decir, al aumentar t :

- $F(t, x) > 0$: la solución **sube**.
- $F(t, x) < 0$: la solución **baja**.
- $F(t, x) = 0$: tiene **tangente horizontal** en ese punto.

Cuanto mayor es $|F(t, x)|$, más inclinado es el segmento.

Leer el campo: $x' = x$



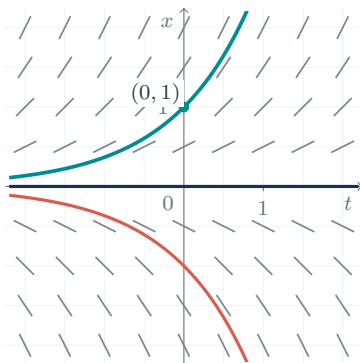
Fíjate en la altura

La pendiente es el valor de x :

- Arriba del eje: positiva.
- Sobre el eje: cero.
- Debajo del eje: negativa.

En una misma fila, todos los segmentos tienen la misma inclinación: **la pendiente no depende de t .**

Una solución sigue las pendientes



Para $x' = x$, las curvas deben ser **tangentes a los segmentos** por los que pasan.

Tres soluciones

$x(t) = e^t$: pasa por $(0, 1)$ y crece.

$x(t) = -e^t$: es negativa y decrece.

$x(t) = 0$: permanece en el eje.

No unimos los extremos de los segmentos: esbozamos una curva suave.

Dibujar el campo: el método de la red

- 1 Elegimos una cuadrícula de puntos (t, x) .
- 2 Calculamos la pendiente $F(t, x)$ en cada punto.
- 3 Dibujamos segmentos cortos de esa inclinación.

Primeros puntos para $x' = -tx$

Punto	Pendiente $-tx$	Segmento
$(0, 1)$	0	Horizontal
$(1, 1)$	-1	Descendente
$(-1, 1)$	1	Ascendente
$(1, -1)$	1	Ascendente

Los segmentos pueden tener la misma longitud: lo importante es su **inclinación**, no su tamaño.

Isoclinas: la misma pendiente en varios puntos

Una **isoclina** reúne puntos donde la pendiente tiene un mismo valor k :

$$F(t, x) = k.$$

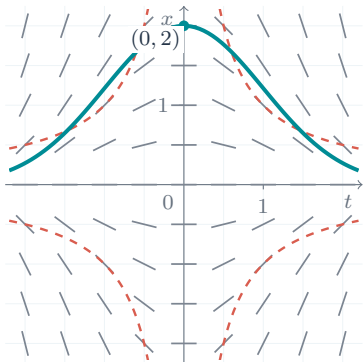
Sirve para dibujar de una vez muchos segmentos con la misma inclinación.

Ejemplo: $x' = -tx$

- $k = 0: tx = 0$. En los dos ejes, los segmentos son horizontales.
- $k = 1: tx = -1$. Sobre esta hipérbola, la pendiente es 1.
- $k = -1: tx = 1$. Sobre esta hipérbola, la pendiente es -1 .

Atención: una isoclina indica dónde repetir una pendiente; **no es, en general, una solución.**

Ejemplo: subir y bajar en $x' = -tx$



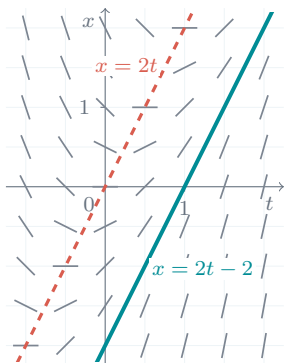
Observa la solución positiva

- Si $t < 0$, sube.
- En $t = 0$, tiene un máximo.
- Si $t > 0$, baja.

Trazos discontinuos: isoclinas de pendientes 1 y -1 .

Curva continua: una solución que sigue el campo.

Ejemplo: distinguir isoclinas y soluciones



Ecuación: $x' = 2t - x$.

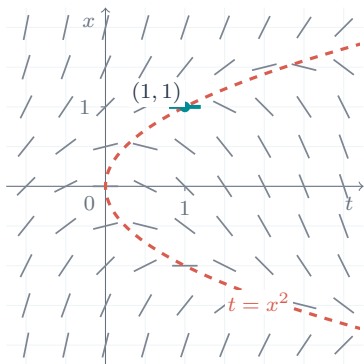
- Debajo de $x = 2t$: las soluciones suben.
- Encima: bajan.
- Sobre ella: tangente horizontal.

Dos rectas, distinto papel

$x = 2t$ es una isoclina, pero no una solución.

$x = 2t - 2$ sí es (la gráfica de una) solución.

Ejemplo: leer el campo sin resolver la ecuación



Ecuación: $x' = x^2 - t$.

La parábola separa dos zonas

- Si $t < x^2$: pendiente positiva.
- Si $t > x^2$: pendiente negativa.
- Si $t = x^2$: pendiente cero.

En $(1, 1)$, la solución tiene tangente horizontal, **pero no sigue la parábola**.

El campo da información aunque no conozcamos una fórmula para la solución.

El problema de valor inicial

Un **problema de valor inicial (PVI)** combina una ecuación diferencial con un punto por el que debe pasar la solución:

$$\underbrace{x'(t) = F(t, x(t))}_{\text{ecuación diferencial}}, \quad \underbrace{x(t_0) = x_0}_{\text{condición inicial}} .$$

Qué buscamos

Una solución en un intervalo I que contenga a t_0 , cuya gráfica permanezca en D , el dominio donde está definida F . En particular, el punto inicial debe cumplir $(t_0, x_0) \in D$.

Ejemplo: elegir una curva de la familia

Para $x' = x$, las soluciones son $x(t) = Ce^t$. Si añadimos $x(0) = 2$, queda $C = 2$: la solución es $x(t) = 2e^t$. Aquí $D = \mathbb{R}^2$ e $I = \mathbb{R}$.

Existencia y unicidad: qué garantiza el teorema

Teorema

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ abierto. Si F y su derivada parcial $F_x = \partial F / \partial x$ son continuas en D , entonces para cada $(t_0, x_0) \in D$ el PVI

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

tiene una *única solución local*: existe un intervalo abierto I que contiene a t_0 en el que la solución está definida.

- **Unicidad:** dos soluciones con el mismo dato inicial coinciden en la intersección de sus intervalos.
- **Local:** no garantiza que la solución exista para todo $t \in \mathbb{R}$.
- Si las hipótesis fallan, el teorema **no permite concluir**; hay que estudiar el caso por otro medio.

Ejemplos: cuándo se aplica el teorema

Sí: en todo el plano

$x' = x^2, x(0) = 1$. Tomamos $D = \mathbb{R}^2$. $F_x(t, x) = 2x$ es continua: hay una única solución local. Es $x(t) = 1/(1 - t)$, con intervalo máximo $(-\infty, 1)$: **dominio D no significa intervalo de solución I** .

Sí: en un dominio que evita la singularidad

$x' = x/t, x(1) = 2$. Tomamos $D = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$. F y $F_x = 1/t$ son continuas en D , y $(1, 2) \in D$. En cambio, $x(0) = 2$ no es un dato admisible: la ecuación no está definida en $t = 0$.

No: la derivada parcial no existe en el punto inicial

$x' = \sqrt{|x|}, x(0) = 0$. Tomamos $D = \mathbb{R}^2$. F es continua, pero F_x no existe cuando $x = 0$. El teorema no se aplica y, en este caso, no hay unicidad: $x(t) \equiv 0$ y $x(t) = t|t|/4$ son dos soluciones del mismo PVI.

1.2

Integración elemental

Estudiaremos métodos para obtener fórmulas de las soluciones de EDO de primer orden y reconocer las hipótesis que permiten aplicarlos.

La sección se divide en:

- **Ecuaciones lineales**
- **Ecuaciones autónomas**
- **Variables separadas**
- **Cambios de variable**
- **Integrales primeras**
- **Ecuaciones exactas**
- **Factores integrantes**

Campo independiente de x : solución general

Sea $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua en un intervalo I . Queremos resolver

$$x'(t) = g(t), \quad t \in I.$$

Resolver es calcular una primitiva

Si $G'(t) = g(t)$, todas las soluciones en I son

$$x(t) = G(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Cambiar C desplaza la gráfica verticalmente, sin cambiar su derivada.

Ejemplo

Si $x' = 2t$, entonces $x(t) = t^2 + C$, pues $(t^2 + C)' = 2t$.

Campo independiente de x : PVI

Si g es continua en I , dados $t_0 \in I$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, buscamos la solución que pasa por (t_0, x_0) :

$$\begin{cases} x'(t) = g(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Como las soluciones son $x(t) = G(t) + C$, sustituimos en la condición inicial para obtener C :

$$x_0 = x(t_0) = G(t_0) + C, \quad C = x_0 - G(t_0).$$

Ejemplo: $x' = 2t, x(1) = 3$

En la familia $x(t) = t^2 + C$, el dato inicial exige $1 + C = 3$. Por tanto, $C = 2$ y la solución es $x(t) = t^2 + 2$ en $\mathbb{R}$.

Ecuaciones lineales

Sean $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en un intervalo I .

Definición: ecuación lineal de primer orden

Es una ecuación de la forma

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t).$$

La incógnita x aparece en primer grado; los coeficientes dependen solo de t .

Dos casos

Homogénea: si $b \equiv 0$ en I , queda $x' = a(t)x$.

No homogénea: si $b \not\equiv 0$ en I , aparece el término $b(t)$. Su **homogénea asociada** es $x' = a(t)x$.

En ambos casos, $D = I \times \mathbb{R}$ y $F(t, x) = a(t)x + b(t)$.

Ecuaciones lineales: caso homogéneo

Queremos resolver $x' = a(t)x$. Sea A una primitiva de a en I .
Multiplicando por $e^{-A(t)}$, obtenemos

$$(e^{-A(t)}x(t))' = e^{-A(t)}(x'(t) - a(t)x(t)) = 0.$$

Solución general

El producto $e^{-A(t)}x(t)$ es constante. Por tanto,

$$x(t) = Ce^{A(t)}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \in I.$$

El valor $C = 0$ incluye la solución trivial $x(t) \equiv 0$.

Ejemplo: $x' = -2x$

Como $A(t) = -2t$, las soluciones son $x(t) = Ce^{-2t}$. Si $x(0) = 3$, entonces $C = 3$ y $x(t) = 3e^{-2t}$.

Ecuaciones lineales homogéneas: dato inicial

Dados $t_0 \in I$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, consideramos el PVI

$$x'(t) = a(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Elegimos $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$, de modo que $A(t_0) = 0$. En la solución general $x(t) = Ce^{A(t)}$, el dato inicial impone $C = x_0$.

Única solución en todo I

$$x(t) = x_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right).$$

El factor exponencial es positivo: si $x_0 \neq 0$, la solución conserva su signo; si $x_0 = 0$, es idénticamente nula.

Modelo: crecimiento de una población bacteriana

DATOS E HIPÓTESIS

Un cultivo contiene inicialmente 1000 bacterias y se duplica en 2 horas. Suponemos que la velocidad de crecimiento es proporcional a la población presente. ¿Cuántas bacterias habrá a las 6 horas?

Modelo: una ecuación lineal homogénea

Sea $N(t)$ la población, con t medido en horas. Entonces

$$N'(t) = kN(t), \quad N(0) = 1000, \quad k > 0.$$

La solución es $N(t) = 1000e^{kt}$. El dato $N(2) = 2000$ implica $e^{2k} = 2$, de donde $k = (\ln 2)/2 \text{ h}^{-1}$.

Predicción del modelo

$$N(t) = 1000 \cdot 2^{t/2}, \quad N(6) = 1000 \cdot 2^3 = 8000.$$

Tres duplicaciones en seis horas, suponiendo recursos suficientes.

Modelo: desintegración radiactiva

DATOS E HIPÓTESIS

Una sustancia tiene un periodo de semidesintegración de 1000 años. La rapidez de pérdida de masa es proporcional a la masa presente. ¿Qué fracción permanece al cabo de 100 años?

Modelo: una ecuación lineal homogénea

Sea $m(t)$ la masa, con t en años y $m_0 > 0$ la masa inicial:

$$m' = -\lambda m, \quad m(0) = m_0, \quad \lambda > 0.$$

Como $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$ y $m(1000) = m_0/2$, obtenemos $\lambda = (\ln 2)/1000 \text{ año}^{-1}$.

Predicción del modelo

$$\frac{m(t)}{m_0} = 2^{-t/1000}, \quad \frac{m(100)}{m_0} = 2^{-0,1} \approx 0,9330.$$

Permanece el 93,30 por ciento; la masa tiende a cero sin llegar a anularse.

Desintegración radiactiva: periodos de semidesintegración

El periodo $T_{1/2}$ es el tiempo necesario para que la cantidad inicial se reduzca a la mitad: $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$.

Elemento	Tipo de desintegración	$T_{1/2}$	Aplicaciones
uranio-238	α, γ	$4.5 \cdot 10^9$ años	Reactores nucleares
plutonio-239	α, γ	24.300 años	Reactores y bombas nucleares
radio-226	α	1620 años	Radioterapia
radón-222	α	3,82 días	
azufre-35	β	87,0 días	
sodio-24	β, γ	15,0 horas	Circulación sangre
oro-198	β, γ	2,7 días	Localización tumores
yodo-131	β	8 días	Hipertiroidismo
bario-140	β	12,8 días	Circulación oleoductos
fósforo-32	β	14,3 días	Autorradiografías
iridio-192	β	70 días	Radiografía industrial
calcio-45	β	165 días	Metabolismo huesos
cobalto-60	β, γ	5,27 años	Radioterapia
cesio-137	β	30 años	Radioterapia
carbono-14	β	5730 años	Geocronología

Caso no homogéneo: una solución particular

Consideramos $x' = a(t)x + b(t)$, con a, b continuas en I . Buscamos primero **una solución concreta**, que llamaremos x_p .

Cómo calcularla

- 1 Elegimos una primitiva A de a : $A'(t) = a(t)$.
- 2 Calculamos una primitiva B de $b(t)e^{-A(t)}$.
- 3 Tomamos $x_p(t) = e^{A(t)}B(t)$.

Para obtener una particular basta elegir una primitiva en cada paso, sin añadir constantes arbitrarias.

El **factor integrante** $e^{-A(t)}$ explica el procedimiento:

$$x' - a(t)x = b(t) \quad \Longleftrightarrow \quad (e^{-A(t)}x(t))' = b(t)e^{-A(t)}.$$

Así, basta tomar $e^{-A(t)}x_p(t) = B(t)$.

Ejemplo: una solución particular de $x' = 2t - x$

Aquí $a(t) = -1$, $b(t) = 2t$ y podemos trabajar en $I = \mathbb{R}$.

Aplicamos los tres pasos

$$A(t) = -t, \quad e^{-A(t)} = e^t,$$

$$B(t) = \int 2te^t dt = 2(t-1)e^t,$$

$$x_p(t) = e^{-t} 2(t-1)e^t = 2t - 2.$$

La integral se calcula por partes; elegimos la constante igual a cero.

Comprobación

$$x'_p(t) = 2, \quad 2t - x_p(t) = 2t - (2t - 2) = 2.$$

Por tanto, $x_p(t) = 2t - 2$ es una solución particular.

Caso no homogéneo: todas las soluciones

Una vez conocida una solución particular x_p , solo falta añadir las soluciones de la homogénea asociada $x' = a(t)x$.

Solución general en I

$$x(t) = \underbrace{x_p(t)}_{\text{particular}} + \underbrace{Ce^{A(t)}}_{\text{homogénea}}, \quad C \in \mathbb{R},$$

donde $A' = a$. Esta fórmula recoge **todas** las soluciones.

En efecto, si x es otra solución, $y = x - x_p$ cumple $y' = a(t)y$. Recíprocamente, sumar una solución homogénea a x_p da otra solución.

Continuamos el ejemplo: $x' = 2t - x$

$$x(t) = 2t - 2 + Ce^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ecuaciones lineales: el problema de valor inicial

El dato $x(t_0) = x_0$ determina la constante de la solución general. También podemos obtener la solución directamente mediante una integral:

Existencia y unicidad en todo I

Si a, b son continuas en I y $t_0 \in I$, el PVI tiene una única solución. Tomando $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$, se puede escribir como

$$x(t) = e^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^t b(s) e^{-A(s)} ds \right).$$

Ejemplo: aplicación de la fórmula del PVI

Resolvemos $x' = 2t - x$, $x(0) = 1$, mediante la fórmula integral.

Sustitución de los datos y cálculo de la integral

Aquí $a(t) = -1$, $b(t) = 2t$, $t_0 = 0$ y $x_0 = 1$; por tanto,

$A(t) = \int_0^t (-1) ds = -t$. Aplicamos la fórmula:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-t} \left(1 + \int_0^t 2se^s ds \right) \\&= e^{-t} \left(1 + [2(s-1)e^s]_0^t \right) \\&= e^{-t} (1 + 2(t-1)e^t + 2) = 2t - 2 + 3e^{-t}.\end{aligned}$$

La integral se calcula por partes. La solución está definida en $\mathbb{R}$.

Modelo: enfriamiento de Newton

DATOS E HIPÓTESIS

Un termómetro a 100 grados se coloca en un medio a 70 grados constantes. A los 6 minutos marca 80. Su enfriamiento es proporcional a la diferencia de temperaturas. ¿Qué marcará a los 20 minutos?

Modelo: la diferencia de temperaturas es homogénea

Con t en minutos, $T' = -k(T - 70)$, $T(0) = 100$ y $k > 0$. La ecuación en T es no homogénea, pero $y = T - 70$ satisface

$$y' = -ky, \quad y(0) = 30 \quad \implies \quad T(t) = 70 + 30e^{-kt}.$$

El dato $T(6) = 80$ da $e^{-6k} = 1/3$, luego $k = (\ln 3)/6 \text{ min}^{-1}$.

Predicción del modelo

$$T(20) = 70 + 30 \cdot 3^{-20/6} \approx 70,77 \text{ grados.}$$

La temperatura se aproxima a la del medio sin bajar de 70 grados.

Modelo: secreción de hormonas

DATOS E HIPÓTESIS

Secreción con ciclo de 24 horas y eliminación proporcional a la cantidad de hormona. Datos del ejercicio: $\alpha = \beta = 1$, $k = 2$, $x(0) = 10$.

Modelo: secreción menos eliminación

Sea $x(t)$ la cantidad de hormona y t en horas; $\omega = \pi/12$.

$$x' = 1 - \cos(\omega t) - 2x, \quad x(0) = 10.$$

En unidades de cantidad por hora, entran $1 - \cos(\omega t)$ y se eliminan $2x$.

Predicción del modelo

$$x_p(t) = \frac{1}{2} - \frac{2 \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)}{4 + \omega^2},$$

$$x(t) = x_p(t) + (10 - x_p(0))e^{-2t}.$$

El término exponencial desaparece en el límite; persiste un ciclo de 24 horas.

Modelo: mezcla de salmuera en un tanque

DATOS E HIPÓTESIS

Un tanque contiene 1000 litros de agua sin sal. Entra salmuera a 6 l/min con 10 g/l de sal y sale mezcla al mismo caudal. Suponemos mezcla homogénea. ¿Cuándo alcanzará una concentración de 5 g/l?

Modelo: entrada menos salida de sal

Sea $S(t)$ la masa de sal en gramos y t en minutos. El volumen es constante: 1000 litros. El balance, en g/min, es

$$S' = 6 \cdot 10 - 6 \frac{S}{1000} = 60 - 0,006S, \quad S(0) = 0.$$

Una particular es $S_p = 10000$; la homogénea aporta $Ce^{-0,006t}$.

Predicción del modelo

$$S(t) = 10000(1 - e^{-0,006t}), \quad c(t) = 10(1 - e^{-0,006t}).$$

La concentración $c(t)$ alcanza 5 g/l a los $t = \ln 2 / 0,006 \approx 115,52$ minutos.

Modelo: problema general de mezclas

DATOS E HIPÓTESIS

Un tanque contiene $V_0 > 0$ litros de agua sin sal. Entra salmuera a v_e l/min, con concentración c_e g/l, y sale mezcla a v_s l/min. Los caudales y c_e son constantes; la mezcla se mantiene homogénea.

Balance de volumen y de sal

Con t en minutos, $V(t) = V_0 + (v_e - v_s)t$ es el volumen. Si $S(t)$ es la masa de sal en gramos, la concentración de salida es $c(t) = S(t)/V(t)$. Entrada menos salida da

$$S'(t) = v_e c_e - \frac{v_s}{V_0 + (v_e - v_s)t} S(t), \quad S(0) = 0.$$

Es una **ecuación lineal**, incluso si el volumen varía.

Validez: Usamos $t \geq 0$ mientras $V(t) > 0$ y no haya desbordamiento. Si $v_e = v_s$, recuperamos el caso de volumen constante.

Ejemplo de mezclas: el volumen aumenta

Un tanque con 1000 litros de agua sin sal recibe 6 l/min a 10 g/l, pero ahora salen 5 l/min. Buscamos la concentración $c(t)$, suponiendo mezcla homogénea.

Planteamiento y solución

El volumen es $V(t) = 1000 + t$ litros. El PVI es $S' = 60 - \frac{5}{1000+t}S$, con $S(0) = 0$. Una particular es $S_p(t) = 10(1000 + t)$. Añadiendo la homogénea,

$$S(t) = 10(1000 + t) + C \left(\frac{1000}{1000 + t} \right)^5.$$

El dato inicial impone $C = -10000$.

Concentración en el tanque:

$$c(t) = \frac{S(t)}{1000 + t} = 10 \left[1 - \left(\frac{1000}{1000 + t} \right)^6 \right] \text{ g/l.}$$

Válida para $t \geq 0$ hasta que el tanque alcance su capacidad.

Ecuaciones autónomas

Sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con $U \subset \mathbb{R}$ abierto.

Definición: ecuación autónoma

Es una ecuación de la forma

$$x'(t) = f(x(t)).$$

La pendiente depende del valor de x , pero no explícitamente de t .
El campo es $F(t, x) = f(x)$ y su dominio es $D = \mathbb{R} \times U$.

Ejemplo: $x' = x^2 - 1$

Aquí $f(x) = x^2 - 1$ y $D = \mathbb{R}^2$. Sobre cada recta horizontal $x = c$, la pendiente es la misma: $c^2 - 1$.

Ecuaciones autónomas: puntos de equilibrio

Definición: punto de equilibrio

Un valor $x_e \in U$ es un **punto de equilibrio** (o crítico) si $f(x_e) = 0$. En ese caso, $x(t) \equiv x_e$ es una solución constante. Recíprocamente, toda solución constante corresponde a un cero de f .

Ejemplo: $x' = x^2 - 1$

Los ceros de f son -1 y 1 . Por tanto, las soluciones constantes son

$$x(t) \equiv -1, \quad x(t) \equiv 1.$$

Antes de dividir por $f(x)$, hay que buscar sus ceros.

Ecuaciones autónomas: traslación en el tiempo

Como el campo no depende explícitamente de t , podemos desplazar horizontalmente cualquier curva solución.

Una solución genera otras por traslación

Si $u: I \rightarrow U$ satisface $u' = f(u)$, entonces

$$x(t) = u(t - t_0), \quad t \in t_0 + I,$$

también es solución, pues $x'(t) = u'(t - t_0) = f(x(t))$.

Aplicación al problema de valor inicial

Si además $u(0) = x_0$, la función $x(t) = u(t - t_0)$ cumple $x(t_0) = x_0$. Por eso basta estudiar los PVI con instante inicial 0.

Ecuaciones autónomas: método de integración

Trabajamos en un intervalo abierto $J \subset U$ donde f no se anula.

Separar e integrar

Sea H una primitiva de $1/f$ en J . Por la regla de la cadena,

$$(H(x(t)))' = \frac{x'(t)}{f(x(t))} = 1.$$

Por tanto, las soluciones con valores en J verifican

$$H(x(t)) = t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Despejar y determinar el intervalo

Como f es continua y no se anula en J , H es estrictamente monótona y tiene inversa. Así,

$$x(t) = H^{-1}(t + C), \quad t + C \in H(J).$$

Ejemplo: una ecuación autónoma sin equilibrios

Queremos resolver $x' = 1 + x^2$. Como $1 + x^2 > 0$, no hay soluciones constantes.

Separación e integración

$$\frac{x'}{1+x^2} = 1 \quad \implies \quad \arctan x(t) = t + C.$$

Despejando, obtenemos todas las soluciones maximales:

$$x(t) = \tan(t + C), \quad -\frac{\pi}{2} - C < t < \frac{\pi}{2} - C.$$

Dato inicial: $x(0) = 0$

Como $C = \arctan 0 = 0$, la solución es $x(t) = \tan t$ en $(-\pi/2, \pi/2)$. No está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ecuaciones autónomas: problema de valor inicial

Sea $x_0 \in J$, donde $J \subset U$ es un intervalo abierto sin ceros de f . Queremos resolver $x' = f(x)$ con $x(t_0) = x_0$.

Integrar desde el dato inicial

Elegimos la primitiva

$$H(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)}, \quad H(x_0) = 0.$$

Integrando la ecuación entre t_0 y t , queda $H(x(t)) = t - t_0$.

Única solución con valores en J

$$x(t) = H^{-1}(t - t_0), \quad t - t_0 \in H(J).$$

Si $t_0 = 0$, la fórmula se reduce a $x(t) = H^{-1}(t)$.

Ecuaciones autónomas: unicidad y monotonía

Cuando $f \in \mathcal{C}^1(U)$

El campo $F(t, x) = f(x)$ y su derivada $F_x(t, x) = f'(x)$ son continuos. El teorema de existencia y unicidad garantiza una única solución local por cada dato inicial $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$.

Consecuencias para las curvas solución

- Si x_0 es un equilibrio, la solución es $x(t) \equiv x_0$.
- Una solución no constante no puede alcanzar ni cruzar un equilibrio.
- Donde $f(x) > 0$, las soluciones son estrictamente crecientes; donde $f(x) < 0$, son estrictamente decrecientes.

La existencia local no implica que la solución esté definida en todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo: integración de $x' = x^2 - 1$

Ya conocemos las soluciones constantes $x(t) \equiv \pm 1$. Como $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, las demás no alcanzan esos valores.

Separar e integrar fuera de los equilibrios

Usamos la descomposición

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right).$$

De $x'/(x^2 - 1) = 1$ obtenemos

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x(t) - 1}{x(t) + 1} \right| = t + K.$$

El cociente no cambia de signo. Distinguimos las soluciones que están entre -1 y 1 de las que están fuera de esa banda.

Ejemplo: soluciones entre los equilibrios

Para $-1 < x(t) < 1$, el cociente $(x(t) - 1)/(x(t) + 1)$ es negativo.

Soluciones en la banda $-1 < x < 1$

Con $C = e^{2K} > 0$, tenemos

$$\frac{x(t) - 1}{x(t) + 1} = -Ce^{2t} \implies x(t) = \frac{1 - Ce^{2t}}{1 + Ce^{2t}}.$$

El denominador nunca se anula: están definidas en todo $\mathbb{R}$. Son decrecientes, pues $x^2 - 1 < 0$, y cumplen

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -1.$$

Dato inicial: $x(0) = 0$

De $0 = (1 - C)/(1 + C)$ resulta $C = 1$ y $x(t) = (1 - e^{2t})/(1 + e^{2t})$.

Ejemplo: soluciones fuera de los equilibrios

Para $|x(t)| > 1$, el cociente $(x(t) - 1)/(x(t) + 1)$ es positivo.

Soluciones en las bandas $x > 1$ y $x < -1$

$$\frac{x(t) - 1}{x(t) + 1} = Ce^{2t} \implies x(t) = \frac{1 + Ce^{2t}}{1 - Ce^{2t}}, \quad C > 0.$$

El denominador se anula en $t_* = -\frac{1}{2} \ln C$. Cada rama es una solución maximal distinta:

- En $(-\infty, t_*)$, se cumple $x(t) > 1$.
- En (t_*, ∞) , se cumple $x(t) < -1$.

Ambas son crecientes y tienen una asíntota vertical en $t = t_*$.

Estas dos familias, junto con $x(t) \equiv \pm 1$, dan todas las soluciones maximales de la ecuación.

Ecuaciones autónomas: cuando solo hay continuidad

La continuidad de f garantiza existencia local, pero **no basta para garantizar unicidad** en los equilibrios.

Ejemplo: $x' = 3x^{2/3}$

La función $f(x) = 3x^{2/3} = 3(\sqrt[3]{x})^2$ es continua en $\mathbb{R}$, pero no es derivable en $x = 0$. La función $x(t) \equiv 0$ es solución.

Para $x(t) \neq 0$, la separación de variables da

$$\frac{x'(t)}{3x(t)^{2/3}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[3]{x(t)} = t + C.$$

Así obtenemos $x(t) = (t + C)^3$, que también satisface la ecuación cuando pasa por $x = 0$.

En particular, $x(t) \equiv 0$ y $x(t) = t^3$ cumplen el mismo dato $x(0) = 0$.

Ejemplo: infinitas soluciones con el mismo dato inicial

Consideramos el PVI $x' = 3x^{2/3}$, $x(0) = 0$.

Soluciones que permanecen un tiempo en el equilibrio

Para cualesquiera $a \leq 0 \leq b$, la función

$$x(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & t < a, \\ 0, & a \leq t \leq b, \\ (t-b)^3, & t > b \end{cases}$$

es solución en todo $\mathbb{R}$ y cumple $x(0) = 0$.

En los puntos de unión, tanto x como x' valen cero; por tanto, la función es derivable y satisface la ecuación también allí.

El dato inicial no determina cuánto tiempo permanece la solución en $x = 0$. Por eso este PVI tiene infinitas soluciones.

Ecuaciones de variables separadas

Las ecuaciones diferenciales de variables separadas tienen la forma

$$x'(t) = g(t)f(x(t)),$$

donde $f: (x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas. La función que define la ecuación diferencial es

$$F: (t_1, t_2) \times (x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t, x) = g(t)f(x).$$

Una ecuación autónoma es de variables separadas con $g(t) \equiv 1$.

El método de integración. $x'(t) = g(t)f(x(t))$

- Sea la ED $x'(t) = g(t)f(x(t))$ donde $f: (x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas.
- Supóngase que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (x_1, x_2)$; por ejemplo, $f(x) > 0$.
- Sea $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ solución. Entonces $I \subset (x_1, x_2)$, $x(I) \subset (x_1, x_2)$
y

$$x'(t) = f(x(t))g(t), \text{ para todo } t \in I.$$

El método de integración. $x'(t) = g(t)f(x(t))$

- Integrando, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int \frac{x'(t)}{f(x(t))} dt = \int g(t) dt + C, \text{ para todo } t \in I.$$

- Si $H(x)$ es una primitiva de $1/f(x)$, entonces

$$H(x(t)) = \int \frac{x'(t)}{f(x(t))} dt, \text{ para todo } t \in I.$$

El método de integración. $x'(t) = g(t)f(x(t))$

- La función $H(x)$ tiene derivada estrictamente positiva y, por tanto, es estrictamente creciente. En consecuencia tiene función inversa, que se denota por H^{-1} . Con esta notación

$$H(x(t)) = G(t) + C, \text{ para todo } t \in I,$$

donde $G(t)$ es una primitiva de $g(t)$. Despejando,

$$x(t) = H^{-1}(G(t) + C), \text{ para todo } t \in I.$$

Nótese que el intervalo I está incluido en alguno de los intervalos del conjunto $A = \{t : H_- < G(t) + C < H_+\}$.

- Recíprocamente, se comprueba que $H^{-1}(G(t) + C)$ restringido a cada uno de los intervalos del abierto A es solución.

- Si $f \in \mathcal{C}^1(U_f)$ y $g \in \mathcal{C}(U_g)$, donde U_f y U_g son abiertos de $\mathbb{R}$, el teorema 1 garantiza que el problema de valor inicial tiene una única solución.
- En efecto, sea

$$F: D = U_g \times U_f \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por $F(t, x) = g(t)f(x)$. Entonces $F, \frac{\partial F}{\partial x}$ son continuas en D .

Cambio de variables

Hay ecuaciones diferenciales que se reducen mediante un “cambio de variable”, a ecuaciones de variables separadas o lineales. A continuación se presentarán algunos ejemplos de resolución de ecuaciones mediante un cambio de variable.

La ecuación de Bernoulli

Tiene la forma

$$x'(t) = a(t)x^m(t) + b(t)x(t),$$

donde a y b son continuas en el intervalo I y donde m es un entero positivo.

La función que define la ecuación diferencial es

$$F: D = I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t, x) = a(t)x^m + b(t)x.$$

La ecuación de Bernoulli

El teorema de existencia y unicidad garantiza que hay una única solución del problema de valor inicial.

Si $m = 0$, es una ecuación diferencial lineal y si $m = 1$ una de variables separadas. Supóngase por tanto que $m \neq 0, 1$. Puesto que $x(t) \equiv 0$ es solución, cualquier otra solución es o estrictamente positiva, o estrictamente negativa en todo su intervalo de definición.

La ecuación de Bernoulli

Sea m par. Se verifica que $x(t)$ es solución no nula de la ecuación de Bernoulli si y solo si $y(t) = x^{1-m}(t)$ es solución de la ecuación diferencial lineal $y'(t) = (1-m)a(t) + (1-m)b(t)y(t)$. En efecto,

$$\begin{aligned}y'(t) &= (1-m)x^{-m}(t)x'(t) \\&= (1-m)x^{-m}(t)(a(t)x^m(t) + b(t)x(t)) \\&= (1-m)a(t) + (1-m)b(t)y(t).\end{aligned}$$

Si m es impar, $y(t)^{\frac{1}{1-m}} = x(t)$ solo está definido para $y(t) > 0$. Pero en este caso $x(t)$ es solución si y solo si $-x(t)$ es solución.

Se dice que el cambio de variables $y = x^{1-m}$ transforma $x'(t) = a(t)x^m(t) + b(t)x(t)$, en $\frac{1}{1-m}y'(t) = a(t) + b(t)y(t)$.

La ecuación de Bernoulli

- La ecuación de Bernoulli también se puede reducir a dos de variables separadas buscando soluciones de la forma $x(t) = u(t)v(t)$ mediante el siguiente procedimiento:
- Se buscan soluciones de la forma $x(t) = u(t)v(t)$. Se verifica que $x(t)$ es solución de la ecuación de Bernoulli si y solo si $u(t)$ y $v(t)$ satisfacen ecuaciones de variables separadas.

La ecuación de Ricatti

Es de la forma

$$x'(t) = a(t)x^2(t) + b(t)x(t) + c(t),$$

donde se supone que $a, b, c: I \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas en el intervalo I .

La función que define la ecuación diferencial es

$$F: D = I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t, x) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t).$$

$$x'(t) = a(t)x^2(t) + b(t)x(t) + c(t)$$

- Si $a(t) \equiv 0$, es lineal y si $c(t) \equiv 0$ es de Bernoulli con $m = 2$.
- Pero a pesar de estas semejanzas formales, esta ecuación diferencial ofrece una diferencia esencial con las anteriores, ya que, en general, sus soluciones no pueden expresarse mediante un número finito de cuadraturas (integraciones) sobre funciones elementales de sus coeficientes, hecho que fue probado por Liouville.
- Sin embargo, si se conoce una solución $x_1(t)$, el cambio de variables $x(t) = x_1(t) + y(t)$ la reduce a una ecuación de Bernoulli.

$$x'(t) = a(t)x^2(t) + b(t)x(t) + c(t)$$

En efecto, sea $x(t) = x_1(t) + y(t)$ solución de la ecuación de Ricatti.

$$\begin{aligned}x'(t) &= x'_1(t) + y'(t) \\&= a(t)x_1^2(t) + a(t)y^2(t) + 2a(t)x_1(t)y(t) \\&\quad + b(t)x_1(t) + b(t)y(t) + c(t) \\y'(t) &= a(t)y^2(t) + (2a(t)x_1(t) + b(t))y(t).\end{aligned}$$

Ecuaciones homogéneas

Tienen la forma

$$x'(t) = h\left(\frac{x(t)}{t}\right).$$

La función que define la ecuación diferencial es

$$F: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t, x) = h(x/t),$$

donde $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \neq 0\}$.

Mediante el cambio de variables $u(t) = x(t)/t$ se transforma en una ecuación de variables separadas.

Ecuaciones definidas implícitamente

Sea $G: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, donde A tiene interior no vacío. Una ecuación diferencial de primer orden en forma implícita es una expresión del tipo

$$G(t, x(t), x'(t)) = 0.$$

Definición

Se dice que $x: I \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$ es solución de la ecuación si para todo $t \in I$,

- x es derivable en t ,
- $(t, x(t), x'(t)) \in A$,
- $G(t, x(t), x'(t)) = 0$.

Integral primera

Definición

Una integral primera de $G(t, x(t), x'(t)) = 0$ en el abierto $D' \subset \mathbb{R}^2$ es una función $u: D' \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- $u \in \mathcal{C}^1(D')$,
- $(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}) \neq (0, 0)$ en cada punto de D' .
- Si $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de $G(t, x, x') = 0$ tal que $(t, x(t)) \in D'$ para todo $t \in I$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$u(t, x(t)) = c, \quad \text{para todo } t \in I.$$

- De manera que las curvas de nivel $u(t, x) = c$ de la integral primera contienen a las gráficas de las soluciones.
- Una integral primera de $t + x(t)x'(t) = 0$ en $D' = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ es $u(t, x) = t^2 + x^2$.
- Una integral primera de $(t + x(t)x'(t))(t^2 + x^2(t))^{-1/2} = 0$ en $D' = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ es $u(t, x) = (t^2 + x^2)^{1/2}$.

Integral primera

Una integral primera de la ED $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ se obtiene de la siguiente manera: Si $x(t)$ es una solución, entonces

$$e^{-A(t)}(x'(t) - a(t)x(t)) = b(t)e^{-A(t)},$$

$$(x(t)e^{-A(t)})' = b(t)e^{-A(t)}$$

$$x(t)e^{-A(t)} - \int b(t)e^{-A(t)} dt = C.$$

De modo que una integral primera es

$$u(t, x) = xe^{-A(t)} - \int b(t)e^{-A(t)} dt.$$

Integral primera

También es fácil comprobar que $u(t, x) = H(x) - G(t)$ es una integral primera de la ecuación $x'(t) = g(t)f(x(t))$, donde $H(x)$ es una primitiva de $1/f(x)$ y $G(t)$ de $g(t)$.

Ecuaciones exactas

Sea $u(t, x)$ una función de clase 1 que describe una superficie en el espacio tridimensional mediante $z = u(t, x)$. Supóngase que la función $x(t)$ tiene su gráfica sobre la curva de nivel

$$u(t, x) = c.$$

Es decir $u(t, x(t)) = c$.

Derivando respecto de t la ecuación anterior, se obtiene la siguiente ED satisfecha por $x(t)$.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t))x'(t) = 0,$$

que podemos reescribirla como

$$M(t, x(t)) + N(t, x(t))x'(t) = 0.$$

Ecuaciones exactas

Nótese que $u(t, x)$ es una integral primera de la ecuación diferencial, siempre que $(u_t, u_x) \neq (0, 0)$. A las ecuaciones del tipo anterior las llamaremos exactas. Es decir:

Definición

Se dice que la ecuación diferencial $M(t, x(t)) + N(t, x(t))x'(t) = 0$ es exacta en D , si existe $u(t, x)$ de clase 1 en D tal que $u_t = M$ y $u_x = N$ en D .

El siguiente resultado caracteriza a las ecuaciones diferenciales exactas.

Ecuaciones exactas

Teorema (Condición de exactitud)

Sea la ED $M(t, x(t)) + N(t, x(t))x'(t) = 0$, donde $M(t, x)$ y $N(t, x)$ son funciones diferenciables con continuidad en el rectángulo $R = (a, b) \times (c, d)$. Entonces existe una función $u(t, x)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = M(t, x) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = N(t, x)$$

para todo $(t, x) \in R$ si y solo si

$$\frac{\partial M}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial N}{\partial t}(t, x)$$

para todo $(t, x) \in R$.

Ecuaciones exactas

El rectángulo R del enunciado del teorema puede ser no acotado. Si $M(t, x)$ y $N(t, x)$ no se anulan simultáneamente en ningún punto de R y la ecuación diferencial es exacta, entonces la función $u(t, x)$ es una integral primera en R y las soluciones se pueden obtener despejando x de la ecuación

$$u(t, x) = c.$$

Factores integrantes

Sea la ED $M(t, x(t)) + N(t, x(t))x'(t) = 0$.

Se denomina factor integrante a una función $\mu(t, x) \neq 0$ para todo (t, x) donde está definida y tal que

$$\mu(t, x(t))M(t, x(t)) + \mu(t, x(t))N(t, x(t))x'(t) = 0$$

es una ED exacta.

Es fácil comprobar que $\mu(t, x) = e^{-\int a(t) dt}$ es un factor integrante para la EDL $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$.

Factores integrantes

En las hipótesis del Teorema que establece la condición necesaria y suficiente de exactitud, la función $\mu(t, x)$ es un factor integrante si y solo si

$$\mu_x M + \mu M_x = (\mu M)_x = (\mu N)_t = \mu_t N + \mu N_t,$$

donde el subíndice $_t$ (resp. $_x$) denota derivación parcial respecto de t (resp. x).

Desintegración radiactiva

Ver Robert L. Borrelli- Courtney S. Coleman, Differential Equations, A Modeling Approach, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632).

Se sabe que ciertos elementos o sus isótopos son inestables, desintegrándose en isótopos de otros elementos mediante emisión de partículas α , partículas β o fotones. Se dice que tales elementos son radiactivos. Por ejemplo, un átomo de radio se desintegra en un átomo de radon, emitiendo una partícula α en el proceso,



Desintegración radiactiva

La desintegración de un único núcleo radiactivo es un proceso aleatorio, y el tiempo exacto de desintegración no puede ser determinado con exactitud. Sin embargo pueden hacerse afirmaciones concretas en el proceso de desintegración de un gran número de átomos radiactivos.

Desintegración radiactiva

La cuestión es:

¿Cuántos núcleos hay en una muestra de un elemento radiactivo en el instante de tiempo t ?

Nuestro sistema es la colección de núcleos radiactivos en la muestra, y lo único que nos interesa medir es el número de núcleos radiactivos en el tiempo t . No es obvio, sin embargo, cuál es la ley de desintegración. Hay numerosas evidencias experimentales que sugieren que la siguiente ley es cierta:

En una muestra que contiene un gran número de núcleos radiactivos, la disminución del número de núcleos radiactivos en un intervalo de tiempo es directamente proporcional a la longitud del intervalo de tiempo y al número de núcleos presente en el tiempo inicial.

Desintegración radiactiva

Si denotamos por $x(t)$ el número de núcleos radiactivos en el tiempo t y el intervalo de tiempo por Δt , la ley se traduce en

$$x(t + \Delta t) - x(t) = -ax(t)\Delta t,$$

donde a es la constante estrictamente positiva de proporcionalidad.

Desintegración radiactiva

El modelo matemático anterior para la ley nos ayuda a darle su justo valor.

Por una parte $x(t)$ y $x(t + \Delta t)$ deben ser enteros, pero $-a\Delta t$ puede no ser un entero. Si queremos mantener la ley debemos idealizar el fenómeno real suponiendo que $x(t)$ es una cantidad continua. Por ejemplo, midiendo $x(t)$ en gramos.

Incluso siendo $x(t)$ continuo la ley pudiera no ser cierta para valores de t grande, ya que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Desintegración radiactiva

Además la ley no tiene sentido si Δt es tan pequeño que ningún núcleo se desintegra en el intervalo de tiempo Δt .

El fallo de la ley para intervalos grandes de tiempo puede ser ignorado, porque sólo estamos interesados en un comportamiento local (en el tiempo). Las dificultades con t pequeño son más preocupantes. Sólo podemos esperar que el procedimiento matemático que se presenta a continuación nos conduzca a un modelo matemático en la que la $x(t)$ teórica sea razonablemente próxima a la experimental.

Desintegración radiactiva

Si dividimos ambos lados de

$$x(t + \Delta t) - x(t) = -ax(t)\Delta t,$$

por Δt y tomamos límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos

$$x'(t) = -ax(t).$$

Desintegración radiactiva

Así que podemos decir:

La velocidad de desintegración del elemento radiactivo es directamente proporcional a la cantidad de materia disponible.

El periodo de semidesintegración del elemento radiactivo, $t_{1/2}$, es el tiempo que debe transcurrir para que la mitad de los núcleos radiactivos se desintegre. La constante a se puede calcular conociendo el periodo de semidesintegración

Elemento	Tipo de desintegración	$T_{1/2}$	Aplicaciones
uranio-238	α, γ	$4.5 \cdot 10^9$ años	Reactores nucleares
plutonio-239	α, γ	24.300 años	Reactores y bombas nucleares
radio-226	α	1620 años	Radioterapia
radón-222	α	3,82 días	
azufre-35	β	87,0 días	
sodio-24	β, γ	15,0 horas	Circulación sangre
oro-198	β, γ	2,7 días	Localización tumores
yodo-131	β	8 días	Hipertiroidismo
bario-140	β	12,8 días	Circulación oleoductos
fósforo-32	β	14,3 días	Autorradiografías
iridio-192	β	70 días	Radiografía industrial
calcio-45	β	165 días	Metabolismo huesos
cobalto-60	β, γ	5,27 años	Radioterapia
cesio-137	β	30 años	Radioterapia
carbono-14	β	5730 años	Geocronología

Determinación de la edad mediante el ^{14}C

Ver Robert L. Borrelli- Courtney S. Coleman, Differential Equations, A Modeling Approach, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632).

Las células vivas absorben carbono directa o indirectamente del dióxido de carbono en el aire. Algunos de los átomos del carbono en este CO_2 son la forma radioactiva: ^{14}C , en lugar del común ^{12}C , producido por las colisiones de los rayos cósmicos (neutrones) con el nitrógeno de la atmosfera. Los núcleos de ^{14}C se desintegran convirtiéndose en núcleos de nitrógeno y emitiendo partículas β . Entonces todos los seres vivos, o seres que estuvieron vivos contienen algunos núcleos de carbono radiactivo, ^{14}C .

Determinación de la edad mediante el ^{14}C

En los años 1960, Willard Libby demostró que una medición cuidadosa de la tasa de desintegración del ^{14}C en una muestra de tejido muerto puede usarse para determinar el número de años desde que murió.

Se considera un problema específico para concentrar nuestra atención:

Determinación de la edad mediante el ^{14}C

Se utilizó un contador Geiger para medir la tasa de desintegración de ^{14}C en fragmentos de carbón vegetal encontrados en la gruta de Lascaux en Francia, donde hay pinturas prehistóricas. El contador registró 1,69 desintegraciones por minuto y por gramo de carbono, mientras que para tejido vivo el número de desintegraciones, medido en 1950, fue de 13,5 por minuto y gramo de carbón. ¿Hace cuántos años se formó el carbón vegetal y, presumiblemente, fueron dibujadas las pinturas?

Determinación de la edad mediante el ^{14}C

En cualquier organismo vivo la razón del ^{14}C al ^{12}C es la misma que en el aire. Si la razón en el aire es constante en el tiempo y en el lugar, entonces también lo será en un tejido vivo. Después de la muerte del organismo, la absorción de CO_2 se detiene y sólo sigue la desintegración radioactiva. El periodo de semidesintegración del ^{14}C es de 5568 ± 30 años (valor internacionalmente aceptado desde 1968).

Determinación de la edad mediante el ^{14}C

Sea $x(t)$ la cantidad de ^{14}C por gramo de carbón en el tiempo t (medido en años) en la muestra de carbón vegetal. Sea $t = T$ el tiempo actual y supongase que $t = 0$ es el tiempo en el que el tejido de la muestra murió. Entonces $x(t) \equiv x(0)$ para todo $t \leq 0$. Para $t > 0$ los núcleos de ^{14}C se desintegran siguiendo la ecuación diferencial

$$x'(t) = -ax(t),$$

donde la constante a se calcula a través de la vida media del ^{14}C .

Determinación de la edad mediante el ^{14}C

Sabemos que el carbón de la muestra presenta 1,69 desintegraciones por minuto y por gramo de carbón y que en un tejido vivo hay 13,5 desintegraciones por minuto y por gramo de carbón. Sabiendo que el número de desintegraciones por unidad de tiempo es proporcional a la velocidad de desintegración $x'(t)$, se calcula T .

La ley de enfriamiento de Newton

Según la ley de Newton del enfriamiento, si un objeto a temperatura $T(t)$ se coloca en un medio que se encuentra a la temperatura constante T_M , entonces la razón de cambio de $T(t)$ es proporcional a la diferencia de temperatura $T(t) - T_M$. Esto da lugar a la ED autónoma

$$\frac{dT}{dt}(t) = k(T(t) - T_M), \quad k < 0.$$

que se resuelve por integración elemental.

Secreción de hormonas

La secreción de hormonas suele ser una actividad periódica. Si una hormona es segregada en un ciclo de 24 hr, entonces la razón de cambio del nivel de la hormona en la sangre se puede representar por medio del problema de valor inicial

$$x'(t) = -kx(t) + \alpha - \beta \cos \frac{\pi t}{12}, \quad x(0) = x_0,$$

donde $x(t)$ es la cantidad de la hormona contenida en la sangre en el instante t , α es la velocidad de secreción media, β la cantidad de variación en la secreción, y k una constante positiva que representa la velocidad a la cual el cuerpo elimina la hormona de la sangre. La ecuación diferencial es de tipo lineal y se integra elementalmente.

Un problema de mezclas

Considere un tanque que contiene V litros de agua, dentro del cual una solución de salmuera empieza a fluir a una velocidad constante de v_e l/min. La solución dentro del tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior del tanque a una velocidad de v_s l/min. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de c_e g/l y $x(t)$ es la cantidad de sal en gramos que hay en el tanque en el tiempo t , entonces cumple la ecuación diferencial lineal

$$x'(t) = v_e c_e - v_s \frac{x(t)}{V + (v_e - v_s)t}.$$

Evolución temporal de poblaciones

Sea $p(t)$ la población en el tiempo t . Si bien la población es siempre un número entero, normalmente es tan grande que se introduce un error muy pequeño al suponer que $p(t)$ es una función continua. Considérese una población de bacterias que se reproducen mediante división celular simple, de modo que la tasa de crecimiento es proporcional a la población presente. Esta hipótesis es consistente con las observaciones de crecimiento de bacterias. Mientras exista espacio suficiente y un buen suministro de alimento para las bacterias, se puede suponer también que la tasa de mortalidad es cero. (Recuerde que en la división celular la célula madre no muere, sino que se convierte en dos nuevas células).

Evolución temporal de poblaciones

Un modelo matemático para la población de bacterias que siga las hipótesis anteriores viene definido por la ecuación autónoma

$$p'(t) = ap(t), \quad a > 0.$$

Evolución temporal de poblaciones

En el estudio de poblaciones humanas, la premisa de que la tasa de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño parece razonable. Sin embargo la hipótesis de una tasa de mortalidad nula es, desde luego, errónea. Suponiendo que las personas fallecen por causas naturales, se podría esperar que la tasa de mortalidad fuera también proporcional al tamaño de la población.

Un modelo matemático para la población teniendo en cuenta los factores anteriores es

$$p'(t) = (a - b)p(t), \quad a, b > 0.$$

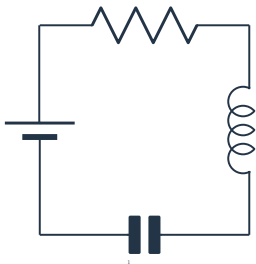
Evolución temporal de poblaciones

¿Qué se puede decir de las muertes prematuras debidas a desnutrición, servicios médicos inadecuados, enfermedades contagiosas, crímenes violentos, etc.? Puesto que estos factores implican la competencia dentro de la población, se puede suponer que la tasa de mortalidad debida a estos factores es proporcional al número de interacciones bipartitas.

Un modelo matemático para la población donde se tenga en cuenta la tasa de mortalidad debida a competencias entre la misma especie es

$$p'(t) = p(t)(a - bp(t)), \quad a, b > 0.$$

Se deducen las ED lineales que rigen el flujo de la electricidad en el circuito simple que se muestra en la figura que sigue.



Este circuito consta de cuatro elementos, cuya acción se puede comprender con facilidad, sin necesidad de tener conocimientos especiales de electricidad.

A. Una fuente de fuerza electromotriz (fem) E –una pila o un generador– impulsa una carga eléctrica y produce una corriente I .

Dependiendo de la naturaleza de la fuente, E puede ser una constante o función del tiempo.

B. Un resistor de resistencia R que se opone a la corriente, reduce la fuerza electromotriz en una magnitud $E_R = RI$. Esta ecuación se conoce como ley de Ohm.

C. Un inductor de inductancia L , que se opone a cualquier cambio de la corriente, produciendo una disminución de la fem en una magnitud

$$E_L = L \frac{dI}{dt}.$$

D. Un condensador de capacitancia C , almacena una carga Q . La carga acumulada por el condensador se opone a la entrada de una carga adicional y la disminución de la fem que se produce en este caso es

$$E_C = \frac{1}{C}Q.$$

Además, puesto que la corriente es la rapidez de flujo de la carga y, en consecuencia, el índice al que la carga aumenta en el

condensador, se tiene

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Estos elementos del circuito actúan de acuerdo a la ley de Kirchhoff, que indica que la suma algebraica de las fuerzas electromotrices en torno a un circuito cerrado es igual a cero. Es decir $E - E_R - E_L - E_C = 0$ o

$$E - RI - L \frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}Q = 0,$$

que se puede escribir como

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E.$$

Dependiendo de las circunstancias, se puede considerar ya sea I o Q como la variable dependiente. En el primer caso se elimina Q , derivando la ecuación anterior con respecto de t y sustituyendo dQ/dt por I :

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}.$$

En el segundo caso se sustituye I por dQ/dt :

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E.$$

Ambas son ecuaciones diferenciales de segundo orden que se resolverán en el Capítulo 2. Cuando no hay condensador se obtiene la ED de primer orden

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E.$$